



## СОДЕРЖАНИЕ

Постановка задачи, составление цепи.....	2
Нормирование параметров и переменных цепи.....	2
Определение передаточной функции цепи $H(S)$ .....	3
Расчет частотных характеристик цепи $H(j\omega)$ .....	5
Составление уравнений состояния цепи, их контроль.....	7
Определение ПХ и ИХ. Аналитический и численный методы.....	9
Вычисление реакции цепи при воздействии одиночного импульса.....	14
Определение спектральных характеристик одиночного импульса.....	16
Вычисление спектра реакции при одиночном импульсе.....	18
Определение спектра периодического сигнала.....	19
Приближенный расчет реакции при периодическом воздействии.....	21
<b>Список литературы</b>	



## 1. Постановка задачи, составление цепи

Дано:

$$R_1 = R_2 = 0.5 [k\Omega]$$

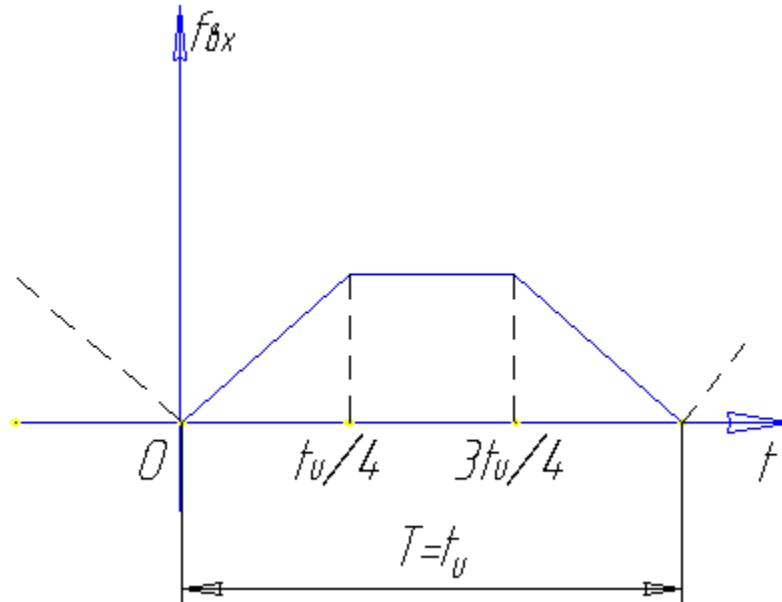
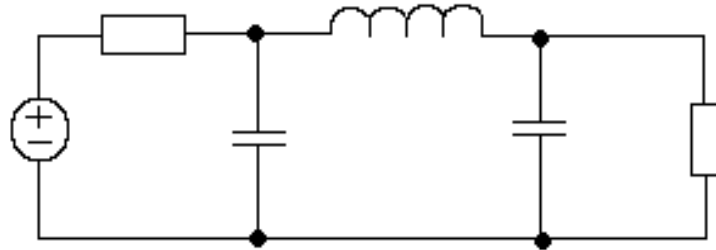
$$L_1 = 0.5 [mH]$$

$$C_1 = C_2 = 1000 [nF]$$

$$t_u = 12.56 [\mu s]$$

$$U_{m1} = 100 [V]$$

$$T = t_u$$



## 2. Нормирование параметров и переменных цепи

За базисные величины принимаем  $t_0 = 10^{-6} c$ , т.е.  $\omega_0 = 10^6 c^{-1}$ ,

$$R_0 = R_1 = 0.5 [k\Omega]$$

Для нормировки параметров используются формулы:

$$\begin{cases} t_* = t/t_0, \omega_* = \omega/\omega_0; \\ R_* = R/R_0, L_* = L\omega_0/R_0; \\ C_* = C\omega_0 R_0. \end{cases} \quad (1)$$

На основании (1) имеем:



$$R_{1*} = R_{2*} = \frac{R_1}{R_0} = \frac{R_2}{R_0} = \frac{0,5 \times 10^3}{0,5 \times 10^3} = 1$$

$$L_{1*} = \frac{L_1 \times \omega_0}{R_0} = \frac{0,5 \times 10^{-3} \times 10^6}{0,5 \times 10^3} = 1$$

$$C_{1*} = C_{2*} = \frac{C_1 \times R_0}{t_0} = \frac{C_2 \times R_0}{t_0} = \frac{1000 \times 10^{-12} \times 0,5 \times 10^3}{10^{-6}} = 0,5$$

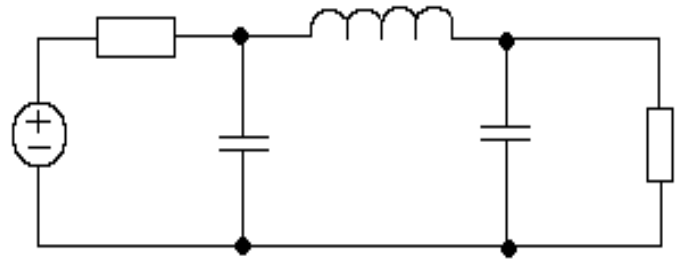
$$t_{u*} = \frac{t_u}{t_0} = \frac{12,56 \times 10^{-6}}{10^{-6}} = 12,56$$

$$\varpi_* = \frac{2 \times \pi}{t_u \times \omega_0} = \frac{2 \times 3,14}{12,56 \times 10^{-6} \times 10^6} = 0,5$$

В дальнейшем при расчетах будем опускать \*, но расчет будет производиться в нормированных величинах.

### 3. Определение передаточной функции цепи H(S)

Для расчёта функции передачи применяем метод передаточных величин:





$$\text{Пусть } U_2'(S) = 1; I_2'(S) = \frac{U_2'(S)}{R_2} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$U_{C_2}'(S) = U_2'(S) = 1$$

$$I_{C_2}'(S) = \frac{U_{C_2}'(S)}{1} = \frac{1 \times S}{2} = \frac{S}{2};$$

$$I_{L_1}'(S) = I_2'(S) + I_{C_2}'(S) = 1 + \frac{S}{2} = \frac{S+2}{2};$$

$$U_{C_1}'(S) = I_{L_1}'(S) \times L_1 \times S = \left(\frac{S+2}{2}\right) \times S = \frac{S^2 + 2 \times S}{2};$$

$$U_{C_1}'(S) = U_{L_1}'(S) + U_{C_2}'(S) = \frac{S^2 + 2 \times S}{2} + 1 = \frac{S^2 + 2 \times S + 2}{2};$$

$$I_{C_1}'(S) = \frac{U_{C_1}'(S)}{1} = U_{C_1}'(S) \times S \times C_1 = \frac{(S^2 + 2 \times S + 2) \times S}{4} = \frac{S^3 + 2 \times S^2 + 2 \times S}{4};$$

$$I_{R_1}'(S) = I_{C_1}'(S) + I_{L_1}'(S) = \frac{S^3 + 2 \times S^2 + 2 \times S}{4} + \frac{S+2}{2} = \frac{S^3 + 2 \times S^2 + 4 \times S + 4}{4};$$

$$U_{R_1}'(S) = \frac{I_{R_1}'(S)}{R_1} = \frac{S^3 + 2 \times S^2 + 4 \times S + 4}{4};$$

$$U_1'(S) = U_{R_1}'(S) + U_{C_1}'(S) = \frac{S^3 + 2 \times S^2 + 4 \times S + 4}{4} + \frac{S^2 + 2 \times S + 2}{2} = \frac{S^3 + 4 \times S^2 + 8 \times S + 8}{4};$$

$$H_U(S) = \frac{U_2'(S)}{U_1'(S)} = \frac{1}{\frac{S^3 + 4 \times S^2 + 8 \times S + 8}{4}} = \frac{4}{S^3 + 4 \times S^2 + 8 \times S + 8};$$

$$\text{Пусть } U_2(S) = 1; I_2(S) = \frac{U_2(S)}{R_2} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$U_{C_2}(S) = U_2(S) = 1$$

$$I_{C_2}(S) = \frac{U_{C_2}(S)}{1} = \frac{1 \times S}{2} = \frac{S}{2};$$

$$I_{L_1}(S) = I_2(S) + I_{C_2}(S) = 1 + \frac{S}{2} = \frac{S+2}{2};$$

$$U_{C_1}(S) = I_{L_1}(S) \times L_1 \times S = \left(\frac{S+2}{2}\right) \times S = \frac{S^2 + 2 \times S}{2};$$

$$U_{C_1}(S) = U_{L_1}(S) + U_{C_2}(S) = \frac{S^2 + 2 \times S}{2} + 1 = \frac{S^2 + 2 \times S + 2}{2};$$

$$I_{C_1}(S) = \frac{U_{C_1}(S)}{1} = U_{C_1}(S) \times S \times C_1 = \frac{(S^2 + 2 \times S + 2) \times S}{4} = \frac{S^3 + 2 \times S^2 + 2 \times S}{4};$$

$$I_{R_1}(S) = I_{C_1}(S) + I_{L_1}(S) = \frac{S^3 + 2 \times S^2 + 2 \times S}{4} + \frac{S+2}{2} = \frac{S^3 + 2 \times S^2 + 4 \times S + 4}{4};$$

$$U_{R_1}(S) = \frac{I_{R_1}(S)}{R_1} = \frac{S^3 + 2 \times S^2 + 4 \times S + 4}{4};$$

$$U_1(S) = U_{R_1}(S) + U_{C_1}(S) = \frac{S^3 + 2 \times S^2 + 4 \times S + 4}{4} + \frac{S^2 + 2 \times S + 2}{2} = \frac{S^3 + 4 \times S^2 + 8 \times S + 8}{4};$$

$$H_U(S) = \frac{U_2(S)}{U_1(S)} = \frac{1}{\frac{S^3 + 4 \times S^2 + 8 \times S + 8}{4}} = \frac{4}{S^3 + 4 \times S^2 + 8 \times S + 8};$$



**Найдем полюса ПФ.**

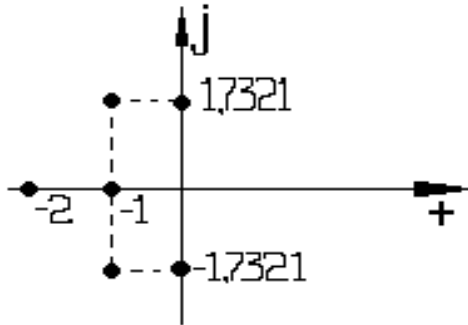
Полюса – корни полинома знаменателя.

$$S^3 + 4 \times S^2 + 8 \times S + 8 = 0;$$

$$S_1 = -2;$$

$$S^2 + 2 \times S + 4 = 0; S_{2/3} = -1 \pm i \times \sqrt{3};$$

Изобразим координаты на комплексной плоскости.



Оценим практическую длительность переходных процессов:

$$t_{mn} = 3 \times \tau = \frac{3}{|\operatorname{Re} S|_{\min}} = 3[c];$$

$$H_U(S) = \frac{4}{(S+2) \times (S-S_2) \times (S-S_3)} = \frac{A}{(S+2)} + \frac{\dot{B}_1}{(S-S_2)} + \frac{\dot{B}_2}{(S-S_3)};$$

$$A = 1;$$

$$\dot{B}_1 = [(S-S_2) \times H_U(S)]_{S=S_2=-1+i \times \sqrt{3}} = \frac{4}{(-1+i \times \sqrt{3}+2) \times (-1+i \times \sqrt{3}+1+i \times \sqrt{3})} = \frac{4}{(-6+2 \times i \times \sqrt{3})} = 0.5774 \times e^{-i \times 150^\circ};$$

$$\dot{B}_2 = 0.5774 \times e^{i \times 150^\circ};$$

$$H_U(S) = \frac{1}{(S+2)} + \frac{0.5774 \times e^{-i \times 150^\circ}}{(S-S_2)} + \frac{0.5774 \times e^{i \times 150^\circ}}{(S-S_3)};$$

Вычеты:

$$A = 1;$$

$$\dot{B}_1 = 0.5774 \times e^{-i \times 150^\circ};$$

$$\dot{B}_2 = 0.5774 \times e^{i \times 150^\circ};$$

4. Рассчитаю частотную характеристику  $H(j\omega)$ . Построим графики АЧХ и ФЧХ, а также график Амплитудно – Фазовой Характеристики (АФХ):

Определим полосу пропускания.

$$H_U(S) = \frac{4}{(S+2) \times (S^2 + 2 \times S + 4)};$$

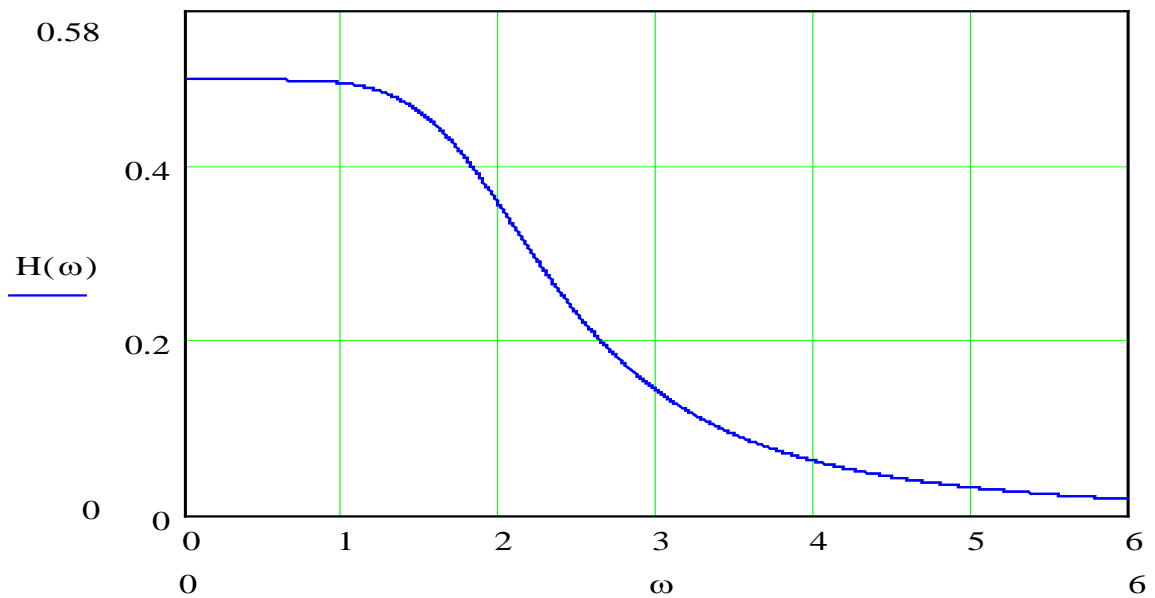
$$\text{Обобщенная частотная, т.е. АФХ: } H_U(j\omega) = \frac{4}{(j \times \omega + 2) \times (-\omega^2 + 2 \times j \times \omega + 4)} = \frac{4}{(j \times \omega + 2) \times ((4 - \omega^2) + 2 \times j \times \omega)};$$

$$\text{Амплитудно – Частотная Характеристика АЧХ: } |H_U(j\omega)| = \frac{4}{\sqrt{(j \times \omega^2 + 2^2) \times ((4 - \omega^2)^2 + 4 \times \omega^2)}} = \frac{4}{\sqrt{(\omega^2 + 4) \times ((4 - \omega^2)^2 + 4 \times \omega^2)}};$$

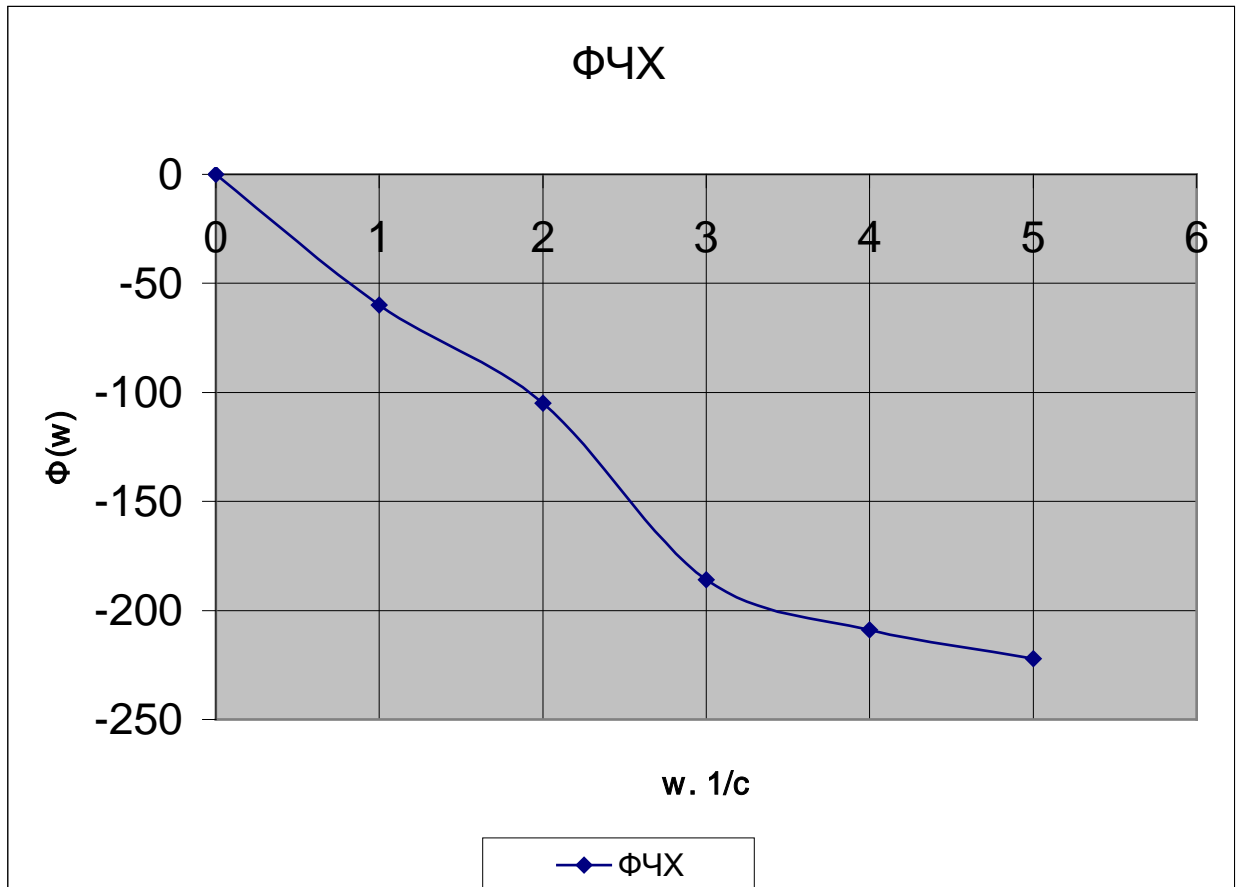
$$\text{Фазочастотная Характеристика (ФЧХ): } \varphi(\omega) = \arctg(0) - \arctg\left(\frac{\omega}{2}\right) - \arctg\left(\frac{2 \times \omega}{4 - \omega^2}\right);$$



### Строим график АЧХ:

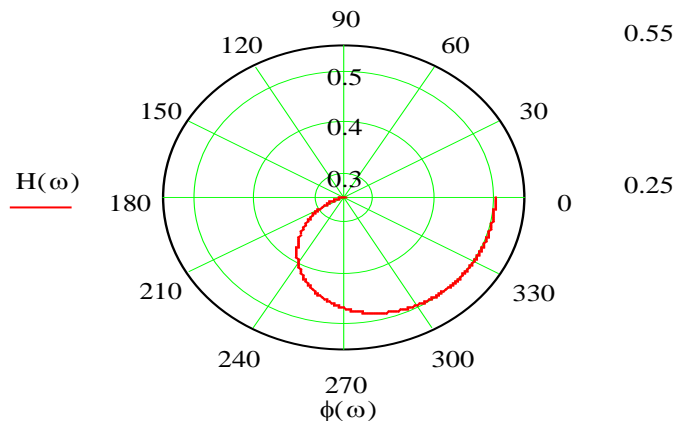


### Строим график ФЧХ:





## Построим график АФХ:



**Полосу пропускания** определяем на уровне

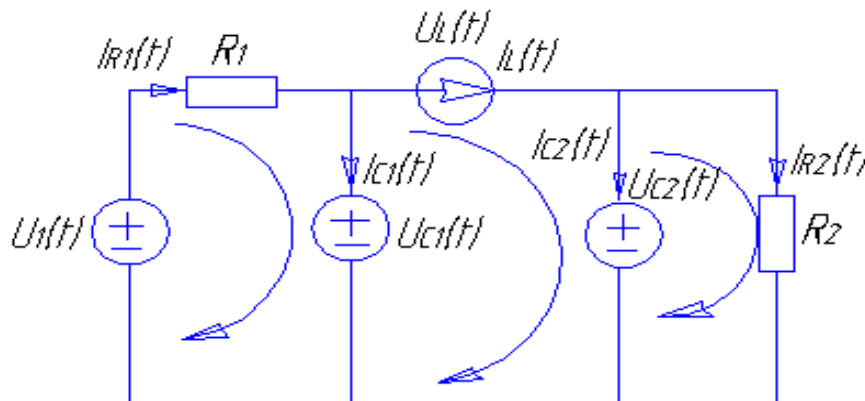
$0,707 \cdot |H(S)|_{\max} = 0,707 \cdot |H(j\omega)| = 0,707 \cdot 0,5 = 0,35$ ; Полоса пропускания  $\omega=(0;2)$ , что соответствует фильтру низких частот.

**Оценка изменения амплитуды.** По графику АЧХ определяем, что  $A(0)=0,5$ , следовательно, площадь выходного сигнала будет в два раза меньше площади входного сигнала, что будет вызвано уменьшением амплитуды в два раза. Но т.к. площадь входного сигнала у нас равна нулю, то будет равна нули и площадь выходного сигнала.

### **5. Составление уравнений состояния цепи, их контроль**

Используем формальную процедуру получения уравнений состояния, для чего заменяем L-элементы на источники тока  $i_{L_1}(t)$ , а C-элемент – на источник напряжения  $u_{C_1}(t)u_{C_2}(t)$ .

Получим схему замещения, показанную на рисунке



**В полученной схеме для дальнейших расчётов воспользуемся МКТ:**

$$R_{11} \times I_1^k(t) + R_{12} \times I_2^k(t) + R_{13} \times I_3^k(t) = U_1^k(t)$$

$$R_{21} \times I_1^k(t) + R_{22} \times I_2^k(t) + R_{23} \times I_3^k(t) = U_2^k(t) \Rightarrow$$

$$R_{31} \times I_1^k(t) + R_{32} \times I_2^k(t) + R_{33} \times I_3^k(t) = U_3^k(t)$$



$$R_{11} = R_1 = 1[Om]; R_{22} = 0; R_{33} = R_2 = 1[Om];$$

$$R_{12} = R_{21} = 0; R_{13} = R_{31} = 0; R_{23} = R_{32} = 0;$$

$$U_1^k(t) = U_1(t) - U_{C1}(t);$$

$$U_2^k(t) = U_{C1}(t) - U_{C2}(t);$$

$$U_3^k(t) = U_{C2}(t);$$

Отсюда контурные токи будут равны:

$$I_1^k(t) = U_1(t) - U_{C1}(t);$$

$$I_2^k(t) = I_L(t);$$

$$I_3^k(t) = U_{C2}(t);$$

Получим систему уравнений:

$$U_L(t) = U_{C1}(t) - U_{C2}(t) / L$$

$$I_{C1}(t) = -I_L(t) - U_{C1}(t) + U_1(t) / C_1$$

$$I_{C2}(t) = I_L(t) - U_{C2}(t) / C_2;$$

$$I_L'(t) = 0 \times I_L(t) + U_{C1}(t) - U_{C2}(t)$$

$$U_{C1}'(t) = -2 \times I_L(t) - 2 \times U_{C1}(t) + 0 \times U_{C2}(t) + 2 \times U_1(t)$$

$$U_{C2}'(t) = 2 \times I_L(t) + 0 \times U_{C1}(t) - 2 \times U_{C2}(t);$$

Составим уравнение связи  $U_2(t) = U_{C2}(t)$ ;

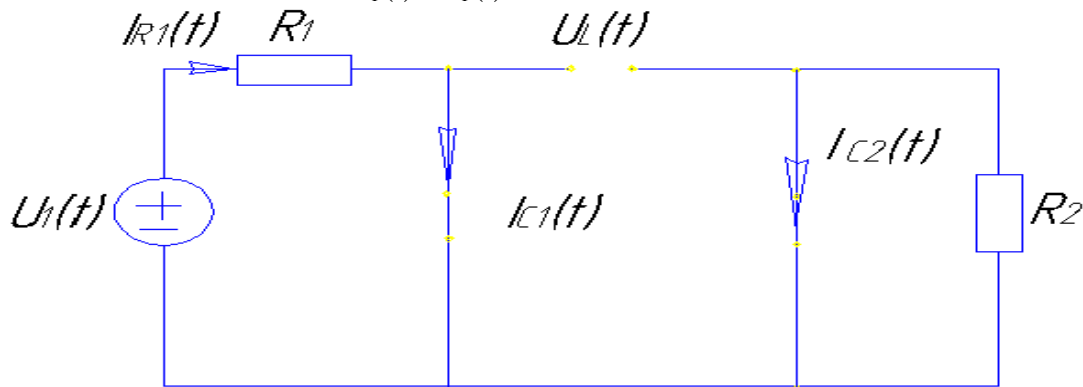
Расчёт характеристического уравнения:

$$A(p) = \begin{vmatrix} -p & 1 & -1 \\ -2 & (-2-p) & 0 \\ 2 & 0 & (-2-p) \end{vmatrix} = p^3 + 4 \times p^2 + 8 \times p + 8;$$

$$p_1 = -2; p_{2/3} = -1 \pm j\sqrt{3};$$

Мы видим, что при определении передаточной функции цепи  $H(S)$  и при составлении уравнений состояния цепи корни уравнений получились одинаковые.

Для контроля уравнений состояния рассмотрим схемы замещения цепи при единичном ступенчатом воздействии  $u_1(t) = \delta_1(t)$  при:



$$t = 0_+$$

$$I_L(0_-) = U_{C1}(0_-) = U_{C2}(0_-) = 0 \Rightarrow C = K3, L = XX;$$





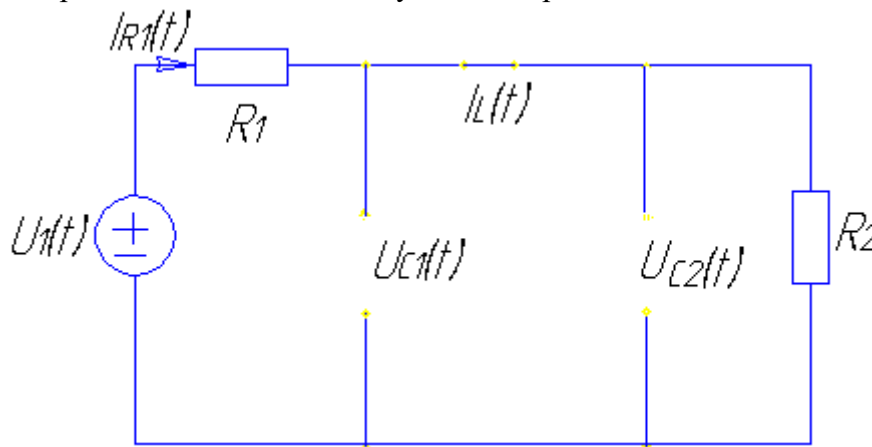
Для схемы имеем :

$$\begin{cases} U_L(0_+) = 0 \\ I_{C1}(0_+) = 1 \\ I_{C2}(0_+) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I'_L(0_+) = \frac{U_L(0_+)}{L} = 0 \\ U'_{C1}(0_+) = \frac{I_{C1}(0_+)}{C_1} = 2; \\ U'_{C2}(0_+) = \frac{I_{C2}(0_+)}{C_2} = 0 \end{cases}$$

Из уравнения состояния с учётом ННУ :

$$\begin{cases} I'_L(0_+) = U_{C1}(0_+) - U_{C2}(0_+) = 0 \\ U'_{C1}(0_+) = -2 \times I_L(0_+) - 2 \times U_{C1}(0_+) + 2 \times U_1(0_+) = 2 \\ U'_{C2}(0_+) = 2 \times I_L(0_+) - 2 \times U_{C2}(0_+) \end{cases}$$

2. При  $t \rightarrow \infty$  наблюдаем вынужденный режим :



Для схемы имеем :

$$\begin{cases} I_L(\infty) = 0.5 \\ U_{C1}(\infty) = 0.5 \\ U_{C2}(\infty) = 0.5 \end{cases}$$

Из уравнений состояния :

Необходимо левую часть приравнять к нулю :

$$\begin{cases} U_{C1}(\infty) - U_{C2}(\infty) = 0 \\ -2 \times I_L(\infty) - 2 \times U_{C1}(\infty) + 2 \times U_1 = 0; \\ 2 \times I_L(\infty) - 2 \times U_{C2}(\infty) = 0 \end{cases}$$

Решив систему, мы получим, что значения совпадают.

Таким образом мы проконтролировали составленные нами уравнения состояния и убедились в их правильном составлении:

6. Определение переходной характеристики  $h_1(t)$  и импульсной  $h(t)$  характеристик. Для расчёта переходной характеристики используем аналитический и численный методы. Построим графики.

$$H_U(s) = \frac{4}{(s+2) \times (s-s_2) \times (s-s_3)} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B_1}{(s-s_2)} + \frac{B_2}{(s-s_3)};$$



$$B_1 = [(S - S_2) \times H_U(S)]_{S=S_2=-1+j\sqrt{3}} = \frac{4}{(S+2)(S-S_3)} \Big|_{S=-1+j\sqrt{3}} = \frac{4}{(1+j\sqrt{3})(2+j\sqrt{3})} = \frac{4}{(-6+2j\sqrt{3})} = \frac{4}{6.9282 \times e^{j150^\circ}} = 0.5774 \times e^{-j150^\circ};$$

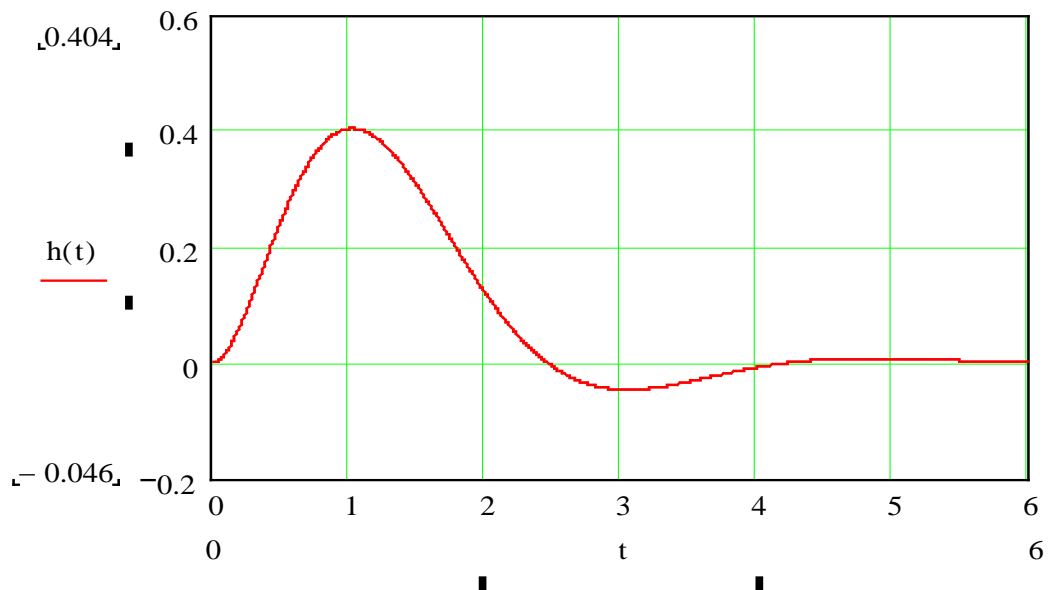
$$A = 1;$$

Вычеты:

$$\begin{cases} A = 1; \\ B_1 = 0.5774 \times e^{-j150^\circ}; \\ B_2 = 0.5774 \times e^{j150^\circ}; \end{cases}$$

$$h(t) = e^{-2t} + 0.5774 \times e^{-j150^\circ} \times e^{(-1+j\sqrt{3})t} + 0.5774 \times e^{j150^\circ} \times e^{(-1-j\sqrt{3})t} = e^{-2t} + 0.5774 \times e^{-t} \times 2 \left[ \frac{e^{-j150^\circ + j\sqrt{3}t} + e^{j150^\circ - j\sqrt{3}t}}{2} \right] =$$

$$= e^{-2t} + 1.1548 \times e^{-t} \times \cos(\sqrt{3} \times t - 150^\circ)$$



**Рассчитываем переходную характеристику:**

$$h_1(t) \div \frac{H_U(S)}{S} = \frac{4}{S(S+2)(S^2+2S+4)} = \frac{A}{S} + \frac{B}{(S+2)} + \frac{C_1}{(S-S_2)} + \frac{C_2}{(S-S_3)};$$

$$A = 0.5;$$

$$B = -0.5;$$

$$C_1 = [(S - S_2) \times H_U(S)]_{S=S_2=-1+j\sqrt{3}} = \frac{4}{S(S+2)(S-S_3)} \Big|_{S=-1+j\sqrt{3}} = \frac{4}{(-1+j\sqrt{3})(-1+j\sqrt{3}+2)(-1+j\sqrt{3}+1+j\sqrt{3})} = \frac{4}{-4(j2\sqrt{3})} =$$

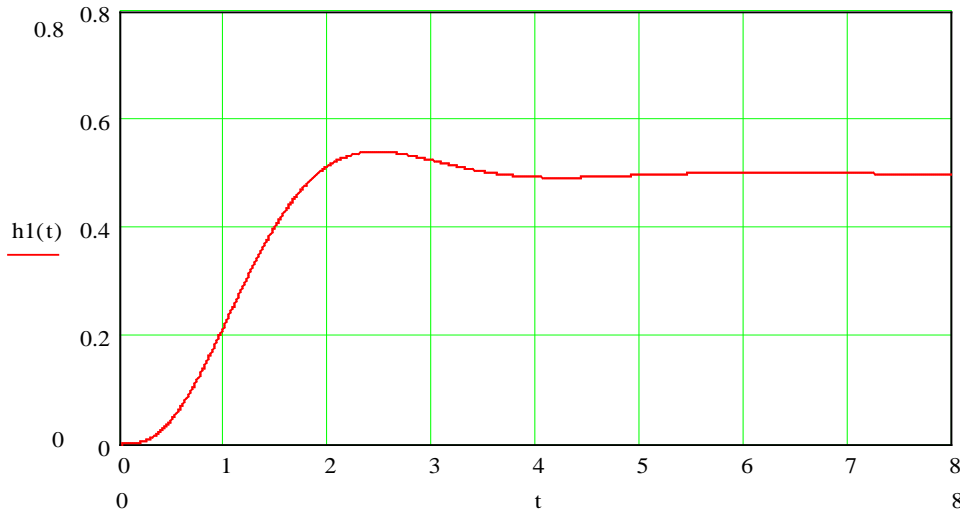
$$= \frac{1}{-1j2\sqrt{3}} = 0.2886;$$

$$C_2 = 0.2886;$$

$$h_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times e^{-2t} + 0.2886 \times e^{(-1+j\sqrt{3})t} + 0.2886 \times e^{(-1-j\sqrt{3})t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times e^{-2t} - 0.5774 \times e^{-t} \times \sin[\sqrt{3}t];$$



## Строим график переходной характеристики



Проконтролируем полученный результат по начальному и конечному значению:

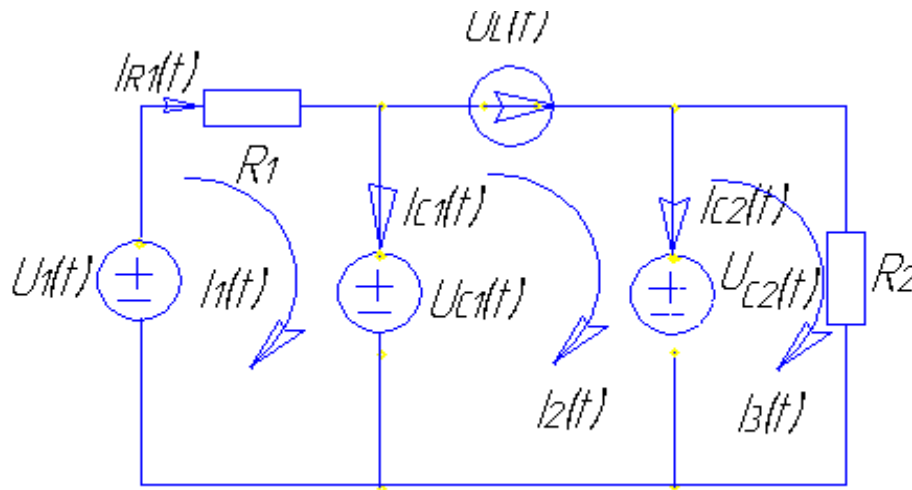
По формуле  $h_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} * e^{-2t} - 0.5774 * e^{-t} * \text{SIN}[\sqrt{3} * t]$ ; (2)  $h_1(0^+) = 0$ ; с другой стороны

$h_1(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{4}{(s+2) * (s^2 + 2 * s + 4)}$ . Очевидно, что  $h_1(0^+) = \frac{1}{\infty} = 0$  и значения совпадают.

По формуле (2)  $h_1(\infty) = \frac{1}{2}$ ; с другой стороны  $h_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4}{(s+2) * (s^2 + 2 * s + 4)}$ .

Очевидно, что  $h_1(\infty) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$  и значения совпадают.

Произведем расчет ПХ численным методом Эйлера.



Для расчёта применим МКТ:

$$I_2^k(t) = I_L(t);$$

$$\begin{cases} R_{11}I_1^k(t) + R_{12}I_2^k(t) + R_{13}I_3^k(t) = U_1^k(t) \\ R_{21}I_1^k(t) + R_{22}I_2^k(t) + R_{23}I_3^k(t) = U_2^k(t); \\ R_{31}I_1^k(t) + R_{32}I_2^k(t) + R_{33}I_3^k(t) = U_3^k(t) \end{cases}$$



$$R_{11} = R_1 = 1[OM]; R_{12} = R_{21} = 0; R_{13} = R_{31} = 0;$$

$$R_{23} = R_{32} = 0; R_{22} = 0; R_{33} = R_2 = 1[OM];$$

$$\begin{cases} U_1^k(t) = U_1(t) - U_{C1}(t) \\ U_2^k(t) = U_{C1}(t) - U_{C2}(t); \\ U_3^k(t) = U_{C2}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1^k(t) = U_1(t) - U_{C2}(t); \\ I_3^k(t) = U_{C2}(t) \end{cases};$$

$$\begin{cases} U_L(t) = U_{C1}(t) - U_{C2}(t) / L \\ I_{C1}(t) = I_1^k(t) - I_2^k(t) = -I_L(t) - U_{C1}(t) + U_1(t) / C_1 \\ I_{C2}(t) = I_2^k(t) - I_3^k(t) = I_L(t) - U_{C2}(t) / C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_L'(t) = U_{C1}(t) - U_{C2}(t) \\ U_{C1}'(t) = -2I_L(t) - 2U_{C1}(t) + 2U_1(t) \\ U_{C2}'(t) = 2I_L(t) - 2U_{C2}(t) \end{cases}$$

Составим уравнение связи:  $U_{C2}(t) = U_2(t)$ ;

Расчёт характеристического уравнения:

$$A(p) = \begin{vmatrix} -p & 1 & -1 \\ -2 & (-2-p) & 0 \\ 2 & 0 & (-2-p) \end{vmatrix} = p^3 + 4p^2 + 8p + 8;$$

$$p_1 = -2; p_{2/3} = -1 \pm j\sqrt{3};$$

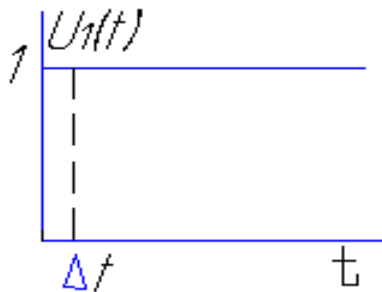
Мы видим, что корни совпадают, следовательно расчёты ведутся правильно.

Численное определение переходной характеристики электрической цепи:

Применим метод Эйлера:  $X(t_{(k+1)}) = X(t_{(k)}) + \Delta t * X'(t_{(k)}) * (t_k)$ ;

$$\Delta t = \frac{t_U}{20} = \frac{12.56}{20} = 0.628$$

Воздействие:  $U_1(t) = \delta_1(t)$ ;





$$1) \begin{cases} I_L = 0; \\ U_{C1} = 0; \\ U_{C2} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} I'_L = 0; \\ U'_{C1} = 2; \\ U'_{C2} = 0; \end{cases}$$

$$2) t_1 = \Delta t = 0.628;$$

$$\begin{cases} I_L(t_1) = I_L(0) + \Delta t * I'_L(0) = 0 + 0.628 * 0 = 0; \\ U_{C1}(t_1) = U_{C1}(0) + \Delta t * U'_{C1}(0) = 1.256; \\ U_{C2}(t_1) = 0.0835; \end{cases}$$

$$\begin{cases} I'_L(t_1) = 1.256; \\ U'_{C1}(t_1) = -0.512; \\ U'_{C2}(t_1) = 2.512; \end{cases}$$

$$4) t_3 = 3\Delta t = 1.884;$$

$$\begin{cases} I_L(t_3) = I_L(t_2) + \Delta t * I'_L(t_2) = 0.3849; \\ U_{C1}(t_3) = U_{C1}(t_2) + \Delta t * U'_{C1}(t_2) = 0.0262; \\ U_{C2}(t_3) = U_{C2}(t_2) + \Delta t * U'_{C2}(t_2) = 0.5868; \end{cases}$$

$$\begin{cases} I'_L(t_3) = -0.5606; \\ U'_{C1}(t_3) = 1.1778; \\ U'_{C2}(t_3) = -0.4038; \end{cases}$$

$$6) t_5 = 5\Delta t = 3.14;$$

$$\begin{cases} I_L(t_5) = I_L(t_4) + \Delta t * I'_L(t_4) = 0.3045; \\ U_{C1}(t_5) = U_{C1}(t_4) + \Delta t * U'_{C1}(t_4) = 1.0187; \\ U_{C2}(t_5) = U_{C2}(t_4) + \Delta t * U'_{C2}(t_4) = -0.0441; \end{cases}$$

$$3) t_2 = 2\Delta t = 1.256;$$

$$\begin{cases} I_L(t_2) = I_L(t_1) + \Delta t * I'_L(t_1) = 0.7887; \\ U_{C1}(t_2) = U_{C1}(t_1) + \Delta t * U'_{C1}(t_1) = 0.9345; \\ U_{C2}(t_2) = U_{C2}(t_1) + \Delta t * U'_{C2}(t_1) = 1.5775; \end{cases}$$

$$\begin{cases} I'_L(t_2) = -0.643; \\ U'_{C1}(t_2) = -1.4464; \\ U'_{C2}(t_2) = -1.5776; \end{cases}$$

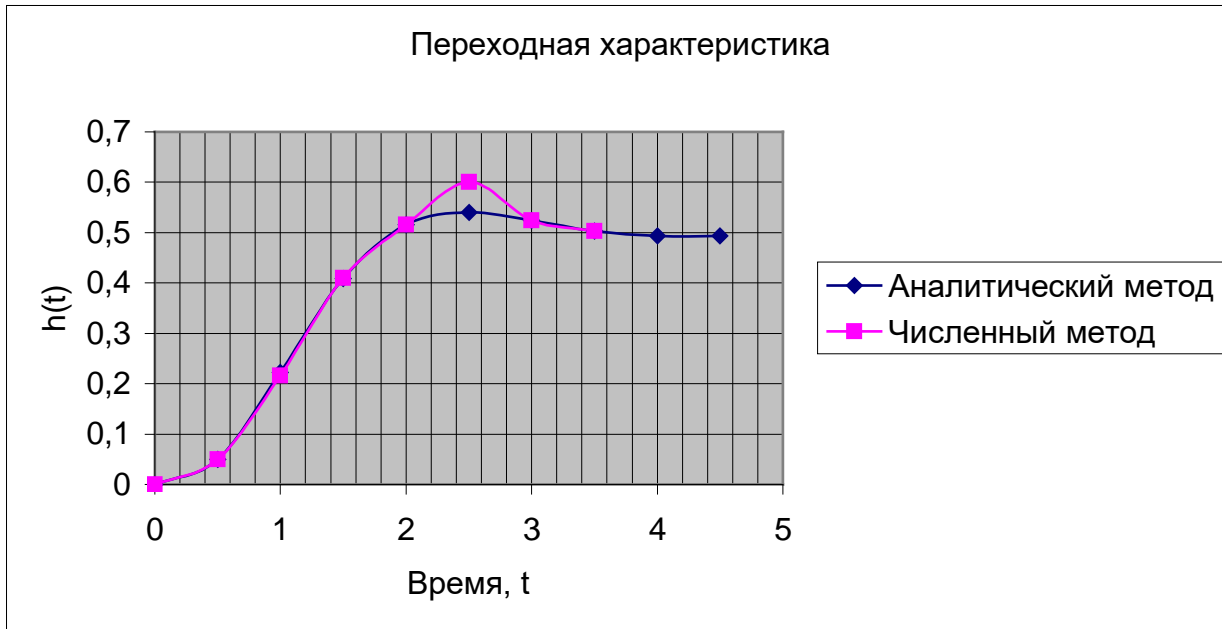
$$5) t_4 = 4\Delta t = 2.512;$$

$$\begin{cases} I_L(t_4) = I_L(t_3) + \Delta t * I'_L(t_3) = 0.0328; \\ U_{C1}(t_4) = U_{C1}(t_3) + \Delta t * U'_{C1}(t_3) = 0.7659; \\ U_{C2}(t_4) = U_{C2}(t_3) + \Delta t * U'_{C2}(t_3) = 0.3332; \end{cases}$$

$$\begin{cases} I'_L(t_4) = 0.4327; \\ U'_{C1}(t_4) = 0.4026; \\ U'_{C2}(t_4) = -0.6008; \end{cases}$$

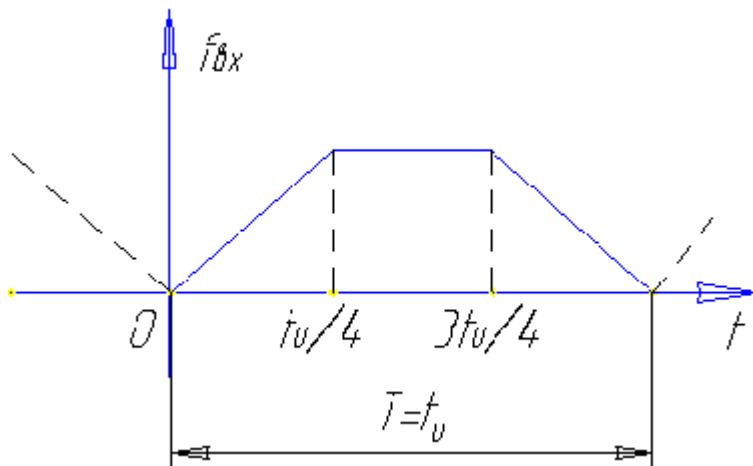


Из расчётов видно, что численный метод не удобен тем, что при расчётах он даёт отрицательные результаты. Лучше применять аналитический метод расчёта.



## 6. Вычисление реакции цепи при воздействии одиночного импульса.

На вход цепи поступает одиночный импульс - трапеция.



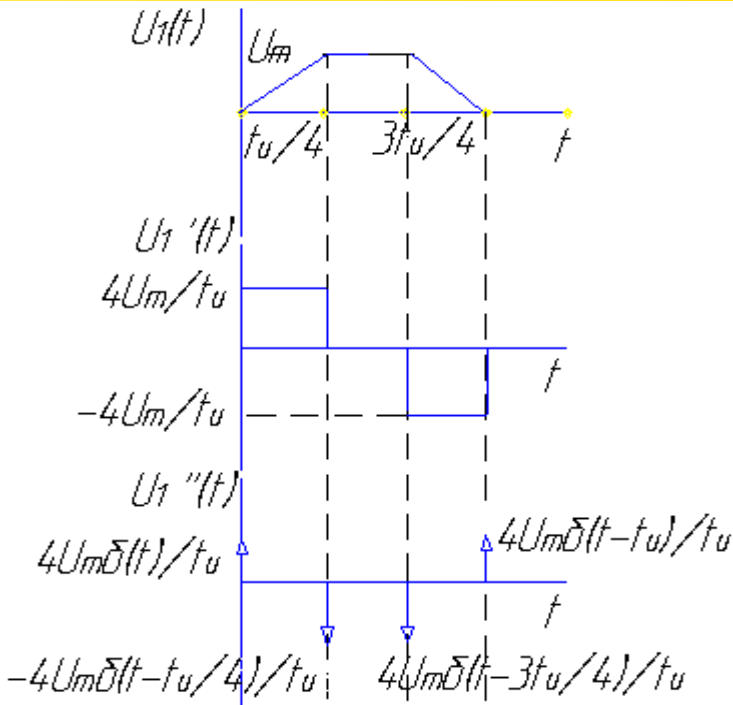
Для определения изображения по Лапласу  $F_1(S)$  импульса  $u_1(t)$  используем метод двойного дифференцирования (МДД).

Последовательность дифференцирования показана на рисунке.

График второй производной  $u_1''(t)$ , показанной на рисунке, содержит 4 дельта-функции. Изображение единичной импульсной функции  $\delta(t) \div \Delta(s) = 1$ .

Для получения  $u_1(t)$  необходимо проинтегрировать 2 раза дельта-функции. Интегрированию в  $t$ -области соответствует деление на  $s$  в  $s$ -области. В результате чего, с учетом теоремы запаздывания получим изображение первого импульса:

$$F_1(S) = \frac{4U_{1m}}{t_u S^2} \left( 1 - e^{-\frac{t_u S}{4}} - e^{-\frac{3t_u S}{4}} + e^{-t_u S} \right)$$



По определению,  $H(S) = \frac{F_{\text{вых}}(S)}{F_{\text{вх}}(S)}$ , а из п.2  $H_U(S) = \frac{4}{(S+2) \times (S^2 + 2 \times S + 4)}$ , тогда

$$F_2(S) = \frac{4U_{lm}}{t_u S^2} \underbrace{\left( 1 - e^{-\frac{t_u S}{4}} - e^{-\frac{3t_u S}{4}} + e^{-t_u S} \right)}_{(*)} * \frac{4}{(S+2)(S^2 + 2S + 4)} = \frac{127.36}{S^2(S+2)(S^2 + 2S + 4)} \times (*) =$$

$$= \left[ \frac{A_1}{S^2} + \frac{A_2}{S} + \frac{A_3}{S+2} + \frac{A_4}{(S-1+j\sqrt{3})} + \frac{A_5}{(S-1-j\sqrt{3})} \right] \times (*);$$

$$A_1 = 15.92; A_3 = 7.96;$$

$$A_4 = \frac{127.36}{(-1+j\sqrt{3})^2(-1+j\sqrt{3}+2)(-1+j\sqrt{3}+1+j\sqrt{3})} = \frac{127.36}{(-1+j\sqrt{3})^2(-1+j\sqrt{3})(2j\sqrt{3})} = \frac{127.36}{(24+8j\sqrt{3})} = 4.59e^{-j30^\circ};$$

$$A_5 = A_4^* = 4.59e^{j30^\circ};$$

$$A_2 = -15.92;$$

$$F_2(S) = \left[ \frac{15.92}{S^2} - \frac{15.92}{S} + \frac{7.96}{(S+2)} + \frac{4.59e^{-j30^\circ}}{(S-S_2)} + \frac{4.59e^{j30^\circ}}{(S-S_3)} \right] * (1 - e^{-3.14S} - e^{-9.42S} + e^{-12.56S});$$

Найдем оригинал изображения  $F_2(S)$ . С учетом теоремы запаздывания получим

$$f_2(t) = \left[ 15.92t - 15.92 + 7.96e^{-2t} + 7.96e^{-t} \cos(1.735t) + 4.59e^{-t} \sin(1.735t) \right] \delta_1(t) -$$

$$- \left[ 15.92(t-3.14) - 15.92 + 7.96e^{-2(t-3.14)} + 7.96e^{-(t-3.14)} \cos(1.735(t-3.14)) + 4.59e^{-(t-3.14)} \sin(1.735(t-3.14)) \right]$$

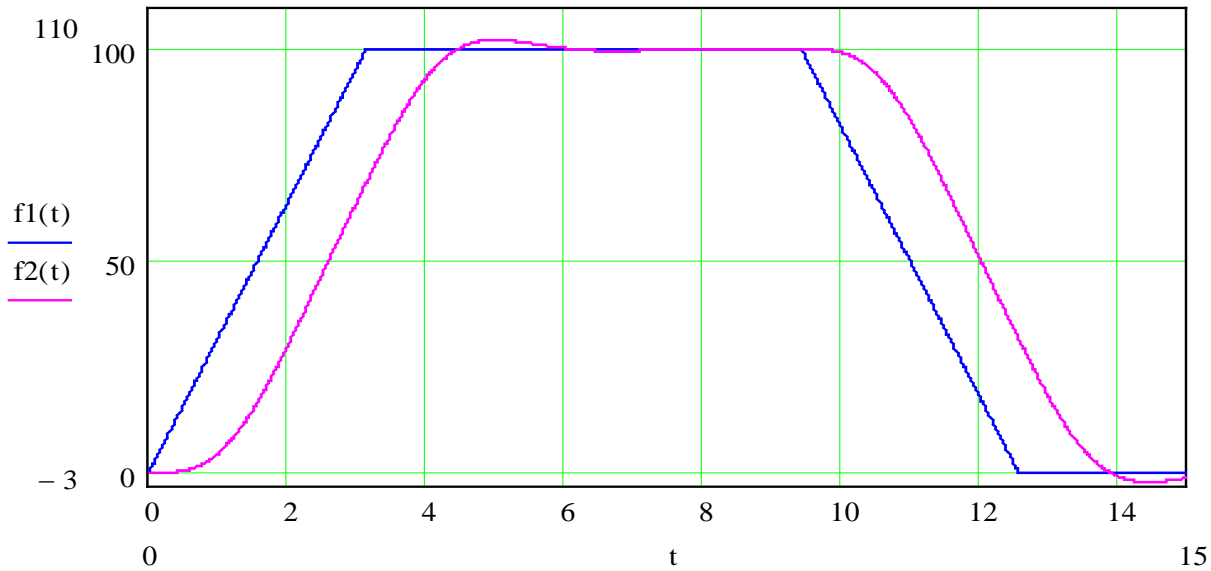
$$\delta_1(t-3.14) - \left[ 15.92(t-9.42) - 15.92 + 7.96e^{-2(t-9.42)} + 7.96e^{-(t-9.42)} \cos(1.735(t-9.42)) + 4.59e^{-(t-12.56)} \sin(1.735(t-9.42)) \right]$$

$$\delta_1(t-9.42) + \left[ 15.92(t-12.56) - 15.92 + 7.96e^{-2(t-12.56)} + 7.96e^{-(t-12.56)} \cos(1.735(t-12.56)) + 4.59e^{-(t-12.56)} \sin(1.735(t-12.56)) \right]$$

$$\delta_1(t-12.56).$$



Построим график реакции  $f_2(t)$  и измененного в  $A(0)=0,5$  раза воздействия<sup>1</sup>:



Из сравнения графиков воздействия и реакции следует, что вывод в п. 4 вполне корректен. Мы наблюдаем запаздывание сигнала реакции по отношению к воздействию на  $t=5$ . Наблюдаем и соотношение амплитуд входного и выходного сигнала.

**7. Определение спектральных характеристик одиночного импульса воздействия**  
В п.6 было получено, что

$$F_1(S) = \frac{4U_m}{t_u S^2} \left( 1 - e^{-\frac{t_u S}{4}} - e^{-\frac{3t_u S}{4}} + e^{-t_u S} \right)$$

$$F_1(j\omega) = \frac{16U_m}{t_u \omega^2} \sin\left(\frac{t_u \omega}{8}\right) \sin\left(\frac{3t_u \omega}{8}\right) e^{-\frac{t_u}{2} j\omega}$$

$$F_1(j\omega) = \frac{400}{\pi \omega^2} \sin\left(\frac{\pi \omega}{2}\right) \sin\left(\frac{3\pi \omega}{2}\right) e^{-2j\pi \omega}$$

$$\dot{A}_{квх} = \frac{2}{T} F_1(j\omega) \Big|_{\omega=k\omega_1=k\frac{2\pi}{T}=\langle T=t_u=4\pi \rangle=k\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{k}{2}} = \frac{800}{\pi^2 k^2} \sin\left(\frac{\pi k}{4}\right) \sin\left(\frac{3\pi k}{4}\right) e^{-j\pi k}$$

$$A_{квх} = \left| \dot{A}_{квх} \right| = \frac{800}{\pi^2 k^2} \left| \sin\left(\frac{\pi k}{4}\right) \right| \left| \sin\left(\frac{3\pi k}{4}\right) \right|$$

$$\Phi_{квх} = -\pi k + \text{фаза} \left[ \sin\left(\frac{\pi k}{4}\right) \sin\left(\frac{3\pi k}{4}\right) \right]$$

$$U_{вх}(t) \cong U_{1вх}(t) = 75 + 40.57 \cos(0.5t - \pi) + 20.28 \cos(t - \pi) + 4.5 \cos(1.5t - \pi) + 0 + 1.62 \cos(2.5t - \pi) + 2.25 \cos(3t - \pi)$$

, тогда

<sup>1</sup> График воздействия показан синей линией.





$$F_1(S)|_{S=j\omega} = F_1(j\omega) = -\frac{4U_m}{t_u\omega^2} \left( 1 - e^{-\frac{t_u j\omega}{4}} - e^{-\frac{3t_u j\omega}{4}} + e^{-t_u j\omega} \right)$$

$$F_1(j\omega) = -\frac{4U_m}{t_u\omega^2} \left[ (1 + e^{-t_u j\omega}) + \left( -e^{-\frac{t_u j\omega}{4}} - e^{-\frac{3t_u j\omega}{4}} \right) \right]$$

Преобразуем значения, стоящие в скобках по отдельности

$$1 + e^{-t_u j\omega} = (e^{-\frac{t_u j\omega}{2}} (e^{\frac{t_u j\omega}{2}} + e^{-\frac{t_u j\omega}{2}})) = 2e^{-\frac{t_u j\omega}{2}} \cos\left(\frac{t_u \omega}{2}\right);$$

$$-e^{-\frac{t_u j\omega}{4}} - e^{-\frac{3t_u j\omega}{4}} = -e^{-\frac{t_u j\omega}{4}} \left( 1 + e^{-\frac{t_u j\omega}{2}} \right) = -e^{-\frac{t_u j\omega}{4}} e^{-\frac{t_u j\omega}{4}} \left( e^{\frac{t_u j\omega}{4}} + e^{-\frac{t_u j\omega}{4}} \right) = -2e^{-\frac{t_u j\omega}{2}} \cos\left(\frac{t_u \omega}{4}\right);$$

Тогда, подставив полученные значения в формулу получим:

$$F_1(j\omega) = -\frac{4U_m}{t_u\omega^2} \left[ 2e^{-\frac{t_u j\omega}{2}} \cos\left(\frac{t_u \omega}{2}\right) - 2e^{-\frac{t_u j\omega}{2}} \cos\left(\frac{t_u \omega}{4}\right) \right] = -\frac{8U_m}{t_u\omega^2} \left[ \cos\left(\frac{t_u \omega}{2}\right) - \cos\left(\frac{t_u \omega}{4}\right) \right] e^{-\frac{t_u j\omega}{2}}$$

Используя соотношение  $\cos\left(\frac{t_u \omega}{2}\right) - \cos\left(\frac{t_u \omega}{4}\right) = -2\sin\left(\frac{t_u \omega}{8}\right)\sin\left(\frac{3t_u \omega}{8}\right)$ , получим:

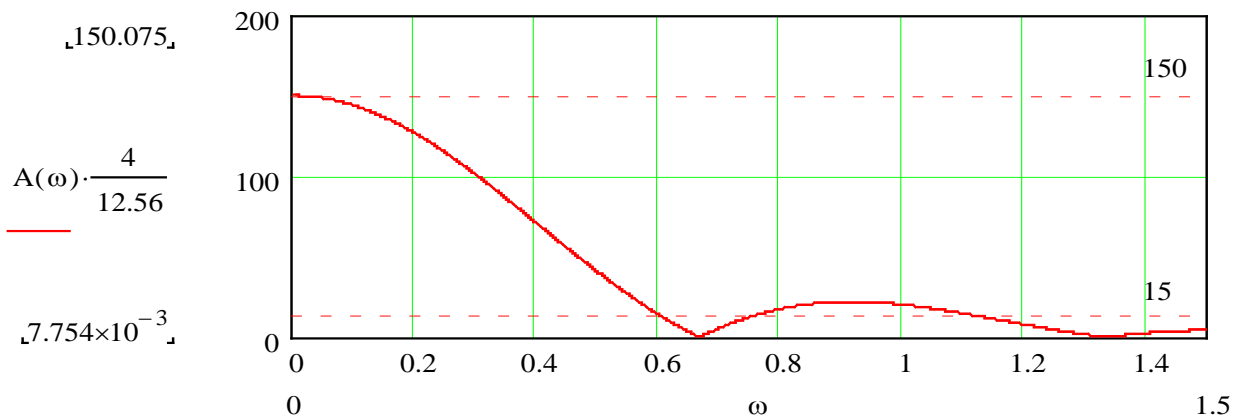
$$F_1(j\omega) = \frac{16U_m}{t_u\omega^2} \left[ \sin\left(\frac{t_u \omega}{8}\right)\sin\left(\frac{3t_u \omega}{8}\right) \right] e^{-\frac{t_u j\omega}{2}}, \text{ причем амплитудный спектр}$$

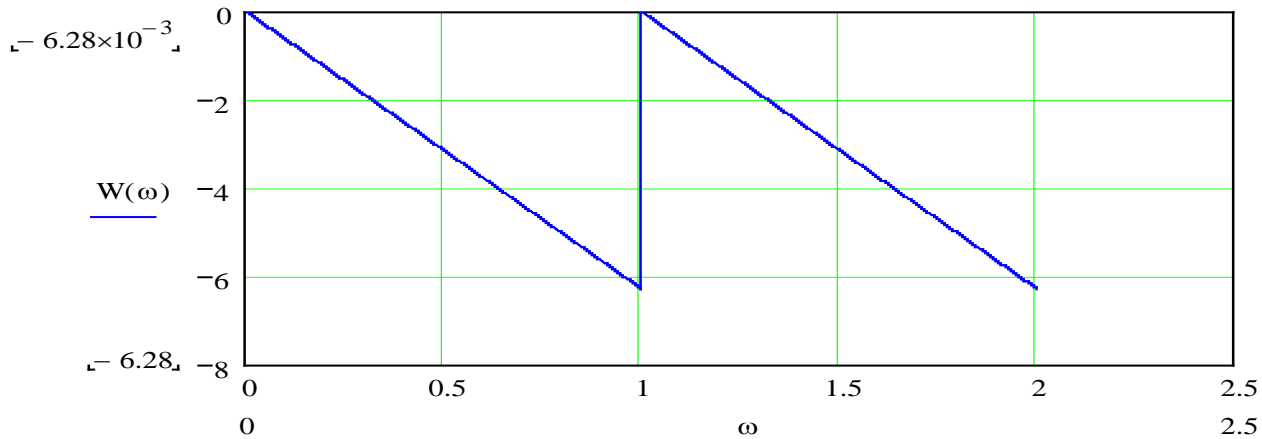
$$A_{\text{ex}}(\omega) = |F_1(j\omega)| = \frac{16U_m}{t_u\omega^2} \left| \sin\left(\frac{t_u \omega}{8}\right) \sin\left(\frac{3t_u \omega}{8}\right) \right|; \text{ а фазовый спектр } \Phi_{\text{ex}}(\omega) = -\frac{t_u}{2}\omega + \begin{cases} 0, \sin\left(\frac{t_u}{4}\omega\right) > 0; \\ \pi, \sin\left(\frac{t_u}{4}\omega\right) < 0. \end{cases}$$

**Вычислим значения амплитудного и фазового спектров в характерных точках.**

При  $\omega = 0$  АС равен площади сигнала, т.е.  $A(0) = S_f$ .

$$S_f = \frac{U_m t_u}{4} + \frac{U_m t_u}{2} = \frac{3U_m t_u}{4};$$





**Установим ширину спектра.** Ширина спектра по «первому лепестку», как это видно из графика АС одиночного импульса воздействия равна  $\Delta\omega_{\text{спектр}}^{1\text{лен}} = (0; 0,2)$ , ширина спектра по десятипроцентному амплитудному критерию  $\Delta\omega_{\text{спектр}}^{10\%} = (0; 0,3)$ . Как видно при сравнении ширины спектра с полосой пропускания  $\omega_{\text{плп}} = (0; 0,2)$ , спектр входного сигнала попадает в полосу пропускания.

**Оценим искажения формы импульса при передаче через цепь.**

Сопоставляя спектры входного сигнала с частотными характеристиками цепи, можно установить, что существенная часть амплитудного спектра входного сигнала укладывается в полосу пропускания, а фазочастотная характеристика линейна. Поэтому при прохождении через цепь входной сигнал будет сравнительно мало искажен. Можно ожидать изменение амплитуды в  $A(0)$  раза, увеличение длительности переднего и заднего фронтов выходного импульса по сравнению с выходным. Т.к., по графику АЧХ,  $A(\infty) = 0$ , то реакция будет непрерывной. Будет наблюдаться и запаздывание сигнала, вычисленное в п.4. При  $\omega < 2$  в НЧ-интервале идеализированная АЧХ  $A(\omega) = 0,5$ , что соответствует

$H(S) = 0,5$ , т.е. в идеале  $u_{\text{вых}}(t) \cong 0,5u_{\text{вх}}(t)$ . В ВЧ-интервале идеализированная АЧХ  $A(\omega) \sim \frac{1}{\omega}$ , что

соответствует  $H(S) = \frac{1}{S}$ , т.е. в идеале  $u_{\text{вых}}(t) \cong \int_0^t u_{\text{вх}}(t) dt$ . Сопоставив эти предположения с п.7,

убеждаемся, что наши выводы корректны и закономерны.

**8. Вычисление спектра реакции при одиночном импульсе воздействия**

Используя канонические соотношения, связывающие амплитудный спектр воздействия, реакции и АЧХ; фазовый спектр воздействия, реакции и ФЧХ.

$$\begin{cases} A_{k\text{вых}}(\omega) = A_{k\text{вх}}(\omega) \cdot A(k\omega_1); \\ \Phi_{k\text{вых}}(\omega) = \Phi_{k\text{вх}}(\omega) + \Phi(k\omega_1). \end{cases}$$

$$A(k\omega_1) = H(\omega) = \frac{4}{\sqrt{(\omega^2 + 4)\left((4 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\right)}} \Bigg|_{\omega = \frac{k}{2}} = \frac{4}{\sqrt{\left(\frac{k^2 + 16}{4}\right)\left(\left(\frac{16 - k^2}{4}\right)^2 + k^2\right)}};$$

$$\Phi(k\omega_1) = -\text{Arctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{2\omega}{4 - \omega^2}\right) \Bigg|_{\omega = \frac{k}{2}} = -\text{Arctg}\left(\frac{k}{4}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{4k}{16 - k^2}\right);$$



$$\Phi_{\text{ex}}(\omega) = -2\pi\omega;$$

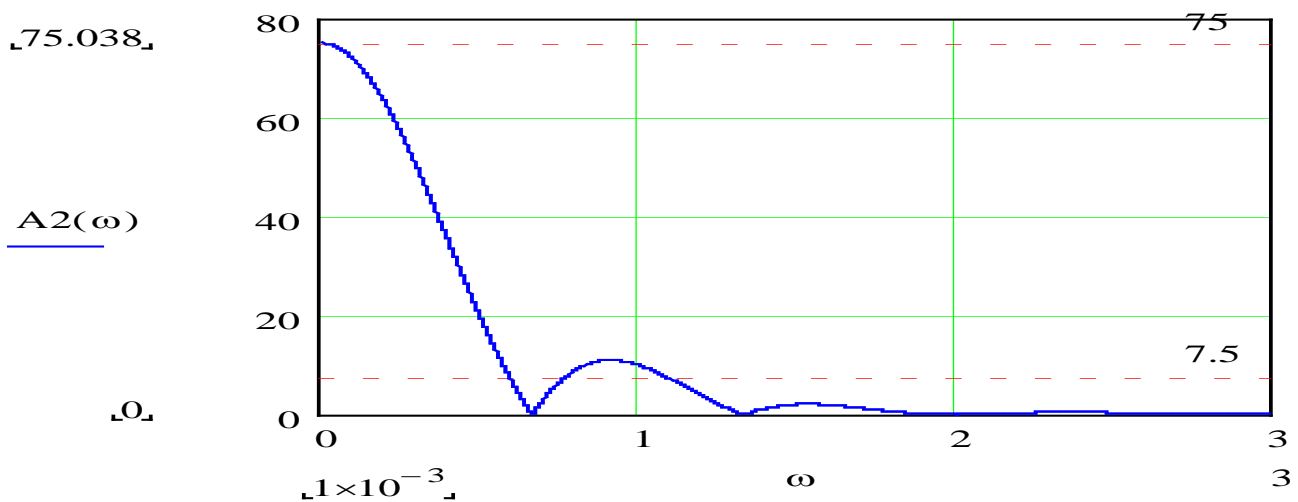
$$A_{\text{ЧХ}} = \frac{4}{\sqrt{(\omega^2 + 4)[(4 - \omega^2)^2 + 4\omega^2]}}; \Phi_{\text{ЧХ}} = -\text{Arctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{2\omega}{4 - \omega^2}\right);$$

$$A_{\text{ex}}(\omega) = |F_1(j\omega)| = \frac{16U_m}{t_u \omega^2} \left| \sin\left(\frac{t_u \omega}{8}\right) \right| \left| \sin\left(\frac{3t_u \omega}{8}\right) \right|; \Phi_{\text{ex}}(\omega) = -2\pi\omega;$$

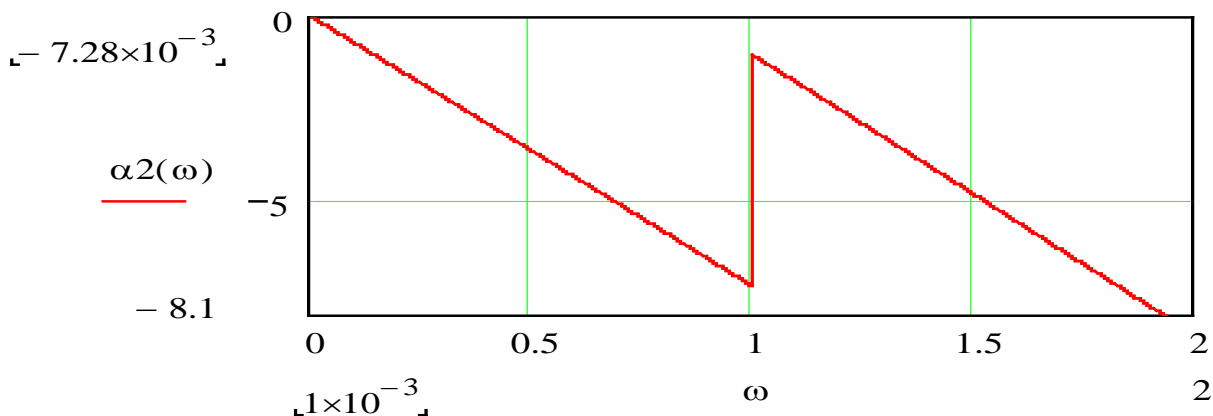
$$A_{\text{ЧХ}} = \frac{4}{\sqrt{(\omega^2 + 4)[(4 - \omega^2)^2 + 4\omega^2]}}; \Phi_{\text{ЧХ}} = -\text{Arctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{2\omega}{4 - \omega^2}\right);$$

Построим амплитудный и фазовый спектр:

Амплитудный спектр:



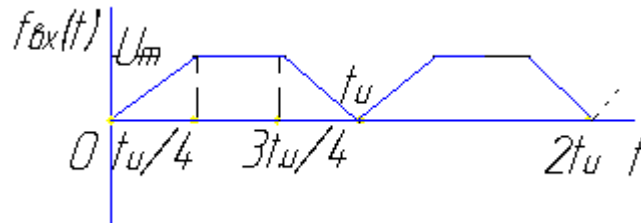
Фазовый спектр:



Из графика Амплитудного спектра хорошо видно, как спектр реакции полностью укладывается в полосу пропускания. Это доказывает лишь то, что у сигнала, прошедшего через ФНЧ, остаются только, те частоты, которые укладываются в полосу пропускания, а остальные “обрезаются” и на выход не проходят.

## 10. Определение спектра периодического входного сигнала

На вход цепи поступает периодический сигнал формы трапеции.



### 1. Спрогнозируем РФ для входного сигнала.

Сигнал является чётной функцией времени, следовательно РФ не будет содержать синусоид. По графику входного сигнала определяем среднее значение  $f_{вх}(t)$

$$f_{вх}(t) = \frac{S_{сигнала}}{t_u} = \frac{U_m \frac{3t_u}{4}}{t_u} = 75$$

Изображение первого импульса сигнала:

$$F_1(S) = \frac{4U_m}{t_u S^2} \left( 1 - e^{-\frac{t_u S}{4}} - e^{-\frac{3t_u S}{4}} + e^{-t_u S} \right)$$

$$F_1(j\omega) = \frac{16U_m}{t_u \omega^2} \sin\left(\frac{t_u \omega}{8}\right) \sin\left(\frac{3t_u \omega}{8}\right) e^{-\frac{t_u j\omega}{2}}$$

$$F_1(j\omega) = \frac{400}{\pi \omega^2} \sin\left(\frac{\pi \omega}{2}\right) \sin\left(\frac{3\pi \omega}{2}\right) e^{-2j\pi \omega}$$

Комплексные амплитуды ряда Фурье представим в виде:

$$\dot{A}_{квх} = \frac{2}{T} F_1(j\omega) \Big|_{\omega=k\omega_1=k \frac{2\pi}{T}=(T=t_u=4\pi)=k \frac{2\pi}{4\pi}=\frac{k}{2}} = \frac{800}{\pi^2 k^2} \sin\left(\frac{\pi k}{4}\right) \sin\left(\frac{3\pi k}{4}\right) e^{-j\pi k}$$

Амплитудный дискретный спектр АДС:  $A_{квх} = \left| \dot{A}_{квх} \right| = \frac{800}{\pi^2 k^2} \left| \sin\left(\frac{\pi k}{4}\right) \right| \left| \sin\left(\frac{3\pi k}{4}\right) \right|$

Фазовый дискретный спектр ФДС:  $\Phi_{квх} = -\pi k + \text{фаза} \left[ \sin\left(\frac{\pi k}{4}\right) \sin\left(\frac{3\pi k}{4}\right) \right]$

Значения АДС и ФДС представим в виде таблицы:

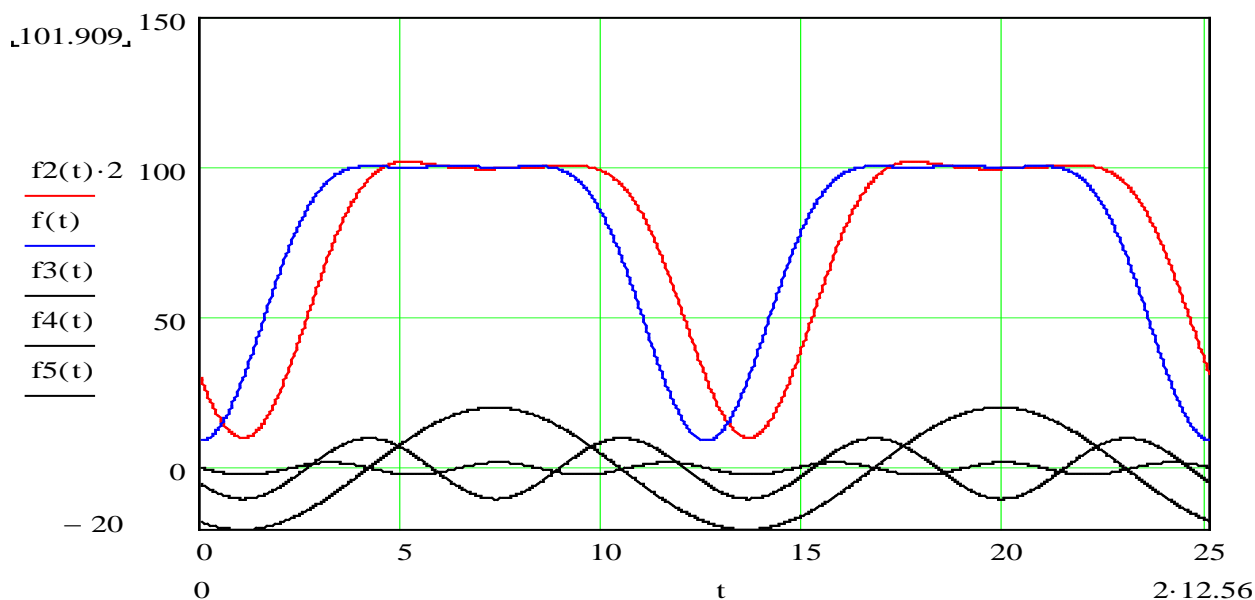
$k$	$\omega_k$	$A_{квх}$	$\Phi_{квх}$
0	0	150	0
1	0,5	40,57	-180
2	1	20,28	-180
3	1,5	4,5	-180
4	2	0	0



5	2,5	1,62	-180
6	3	2,25	-180

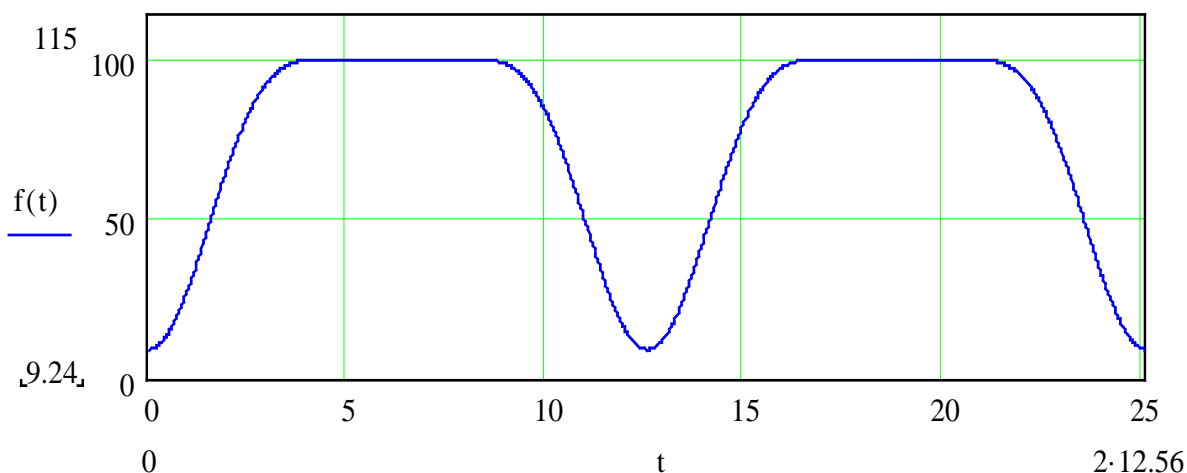
Ограничившись первыми пятью гармониками (не считая нулевой) и с учётом того, что у каждой гармоники фазовый сдвиг равен  $-\pi$ , запишем отрезок ряда Фурье входного сигнала и построим его на одном графике вместе с входным сигналом.

$$f_{ax}(t) \cong U_{1ax}(t) = 75 + 40.57 \cos(0.5t - \pi) + 20.28 \cos(t - \pi) + 4.5 \cos(1.5t - \pi) + 0 + 1.62 \cos(2.5t - \pi) + 2.25 \cos(3t - \pi);$$



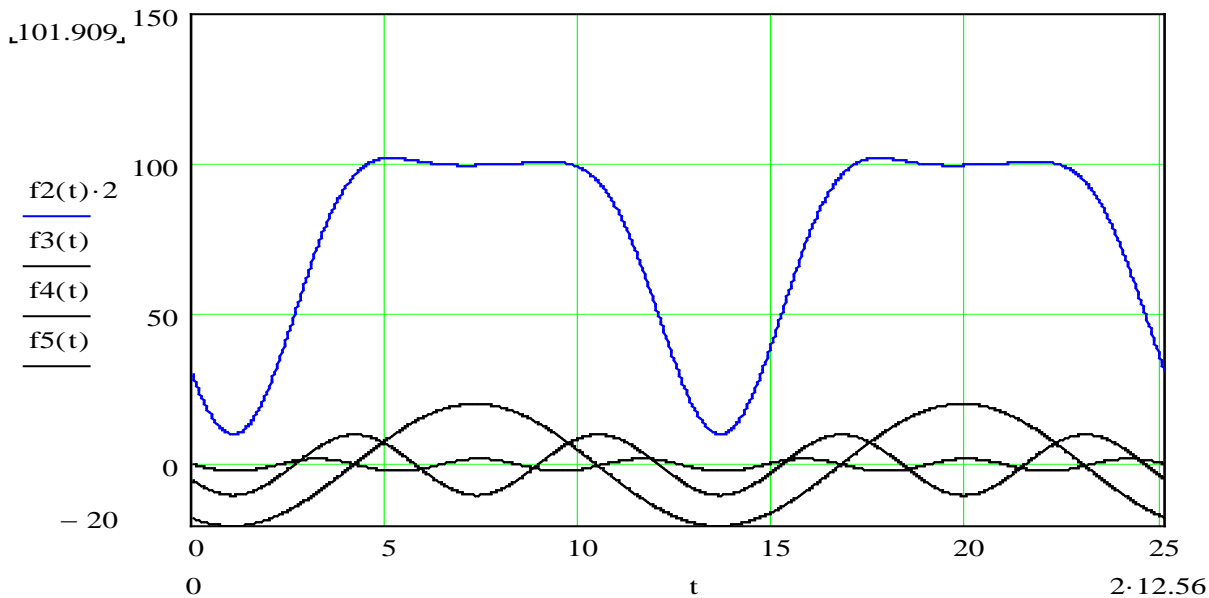
Синей линией показан входной сигнал, а красной выходной.

Исследуем влияние числа членов РФ на точность аппроксимации входного сигнала отрезком РФ (6 членов РФ, не считая постоянной составляющей).



Как и следовало ожидать, чем больше членов ряда Фурье мы берём, то полученный аппроксимированный сигнал более похож на исходные периодическое воздействие  $U_{ax}(t)$ .

**Построим график входного периодического сигнала, аппроксимированного 3 слагаемыми РФ:**



Графическое представление ДАС и ФДС представлены ниже (миллиметровая бумага).

### 11. Приближенный расчет реакции при периодическом воздействии

Амплитуды и начальные фазы гармоник выходного напряжения найдем из следующих соотношений:

$$\begin{cases} A_{kвых}(\omega) = A_{kвх}(\omega) \cdot A(k\omega_1); \\ \Phi_{kвых}(\omega) = \Phi_{kвх}(\omega) + \Phi(k\omega_1). \end{cases}$$

Воспользовавшись АЧХ и ФЧХ, найденными в п.4:

$$A(k\omega_1) = H(\omega) = \frac{4}{\sqrt{(\omega^2 + 4)\left((4 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\right)}} \Bigg|_{\omega = \frac{k}{2}} = \frac{4}{\sqrt{\left(\frac{k^2 + 16}{4}\right)\left(\left(\frac{16 - k^2}{4}\right)^2 + k^2\right)}};$$

$$\Phi(k\omega_1) = -\text{Arctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{2\omega}{4 - \omega^2}\right) \Bigg|_{\omega = \frac{k}{2}} = -\text{Arctg}\left(\frac{k}{4}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{4k}{16 - k^2}\right);$$

Составим таблицу следующего вида:

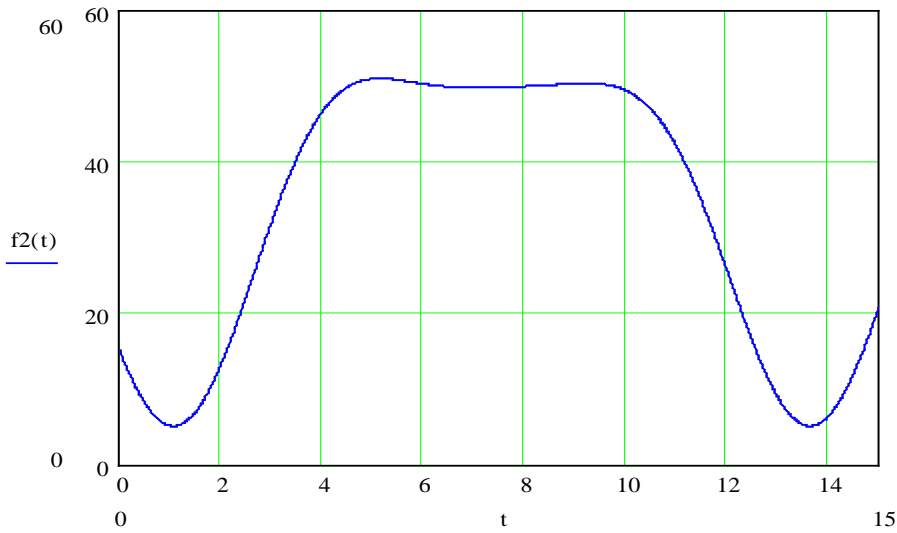
$k$	$\omega_k$	$A_{kвх}$	$\Phi_{kвх}$	$A(k\omega_1)$	$\Phi(k\omega_1)$	$A_{kвых}$	$\Phi_{kвых}$
0	0	150	0	0,5	0	75	0
1	0,5	40,57	-180	0,5	-29	20,28	-209
2	1	20,28	-180	0,48	-60,25	9,73	-240,25
3	1,5	4,5	-180	0,46	-96,6	2,07	-276,6

Запишем отрезок ряда Фурье выходного периодического сигнала:

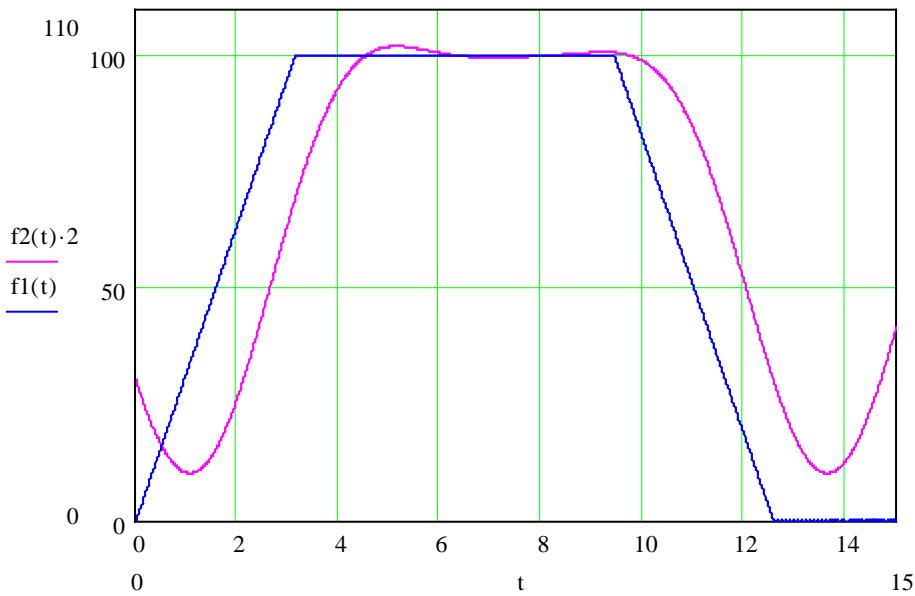
$$U_{вых}(t) \cong 37.5 + 20.28 \cos(0.5t - 209^\circ) + 9.73 \cos(t - 240.25^\circ) + 2.07 \cos(1.5t - 276.6^\circ);$$

Построим ДАС и ФДС выходного сигнала (на миллиметровой бумаге):

**Построим график реакции:**



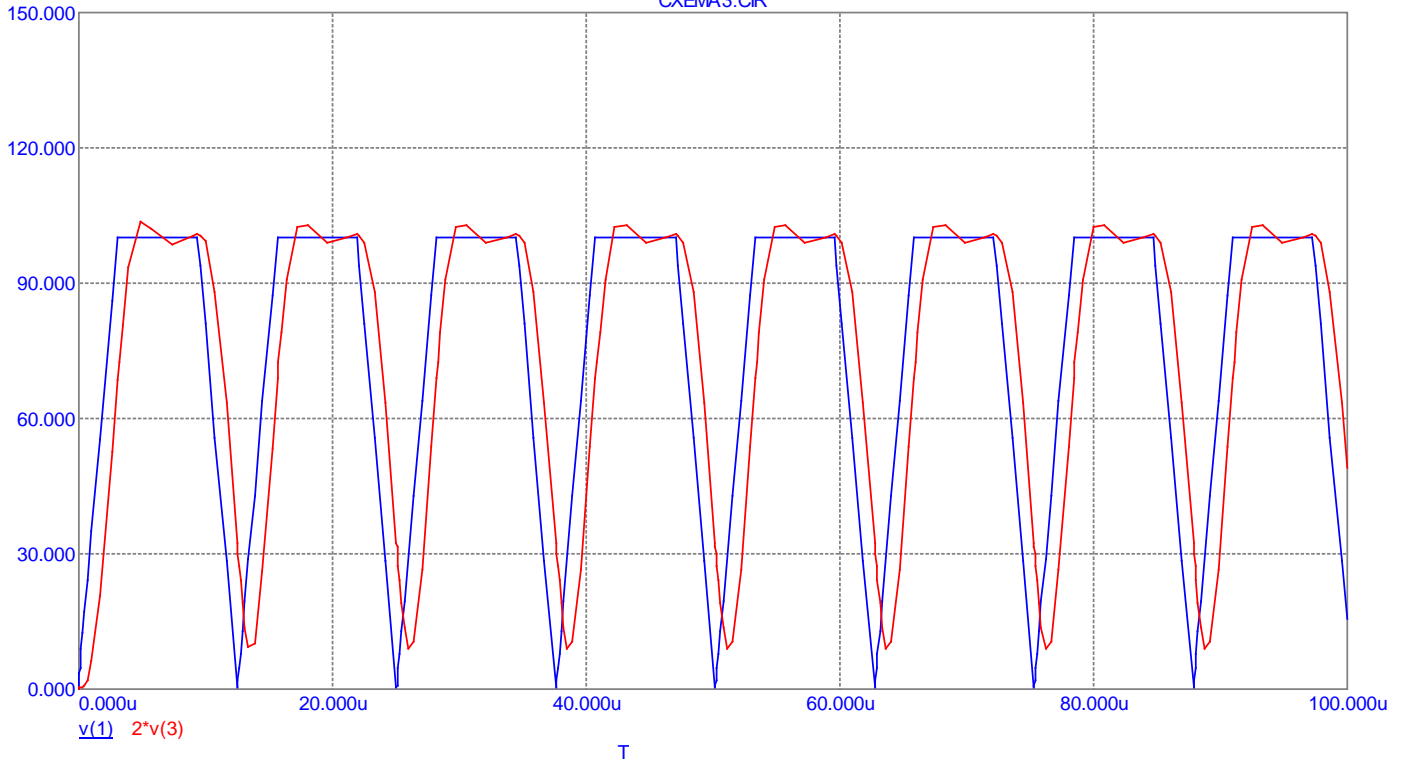
Для наглядного восприятия искажения сигнала совместим график воздействия, измененного в  $A(0) = 0,5$  раза с графиком реакции (воздействие показано сиреневой линией):



Также построим последовательность импульсов:



CXEMA3.CR



Оценка искажения передачи.

Из графиков видно, что периодический сигнал при его прохождении через цепь искажается не сильно, что вызвано тем, что 4 основные гармоники спектра сигнала попадают в полосу пропускания цепи ( $\Delta\omega_m = (0, 2)$ ). Ослабление более высоких гармоник приводит к некоторому сглаживанию входного сигнала. Выходной сигнал запаздывает на  $t = 2$  по отношению к входному.





## Список литературы

1. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. - М.: Высш. школа, 1981.
2. Матханов П. Н., Мерзлютин Ю. Б., Чернышев Э. П. Методические указания для студентов ФРТ к выполнению курсовой работы по ТОЭ на тему “Исследование прохождения сигналов через линейную электрическую цепь”. ЛЭТИ - Л., 1988.
3. Mathcad 2001.
4. Microsoft Word 2000.
5. Конспект лекций.
6. Бычков Ю.А., Завьялов А.Е., Чернышев Э.П. Практикум по теории цепей
7. MicroCap 7.0