



## НОВОУРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра промышленной электроники

### РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

на тему “ Анализ переходных процессов в цепи второго порядка,  
находящейся под воздействием источника постоянного напряжения”

Исполнитель:

Руководитель

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2007 г.



## Содержание.

1. Исходные данные и формулировка задания
2. Анализ переходных процессов в линейных цепях второго порядка классическим методом
3. Расчет начальных и установившихся реакций цепи. Формулировка начальных условий.....
4. Расчет тока и напряжения в схеме до коммутации.....
5. Формулировка начальных условий
6. Расчет установившихся реакций в цепи после коммутации
7. Составление системы дифференциальных уравнений для цепи после коммутации
8. Нахождение характеристического уравнения, расчет его корней.....
9. Определение постоянных интегрирования для  $UR1(t)$ .....
10. Построение кривой переходного процесса для  $UR1(t)$ ....
11. Анализ переходных процессов в линейных цепях второго порядка операторным методом.....
12. Расчет начальных условий и установившихся реакций в цепи после коммутации
13. Составление операторной схемы замещения
14. Составление операторных уравнений для изображения тока  $I(p)$  и напряжения  $U(p)$
15. Нахождение соответствующего оригинала для напряжения  $UR1(p)$ .....
16. Приложение.....
17. Замечания.....



## Исходные данные и формулировка задания.

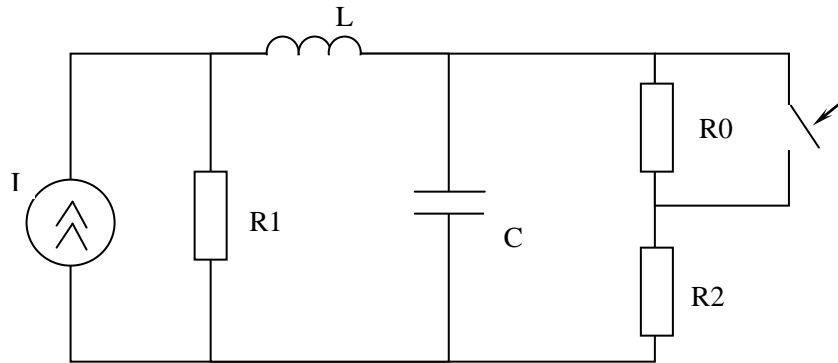


Рисунок 1. Исходная схема

Исходные данные: схема представлена на рисунке 1.

Таблица 1.

I, A	R0, Ом	R1, Ом	R2, Ом	L, Гн	C, мкФ	искомая величина
10	40	20	40	1	1	$U_{R1}(t)$

Задание.

1. Определить функцию изменения искомой величины, не являющейся переменной состояния во время переходного процесса классическим методом.
2. Построить график переходного процесса на интервале времени  $t > t_{mn}$
3. Определить функцию изменения искомой величины во время переходного процесса операторным методом.

Приведём схему на рис.1 к виду на рис.2 , где  $E = I \cdot R_1 = 10 \cdot 20 = 200 \text{ В}$ .

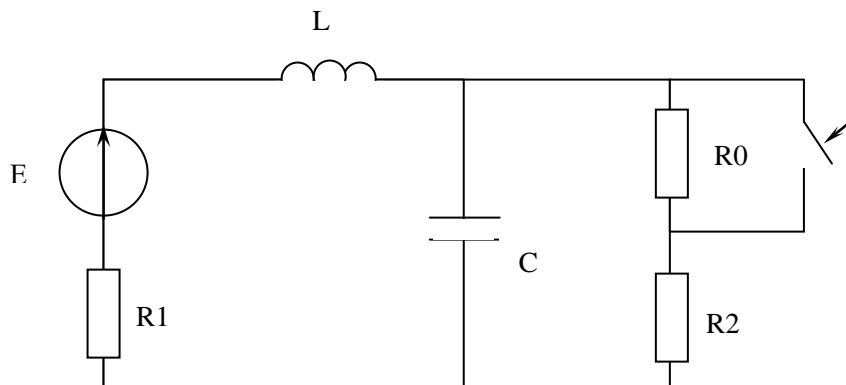


Рисунок 2. Исходная схема (после преобразований)



## 1 Анализ переходных процессов в линейных цепях второго порядка классическим методом

### 1. Расчет начальных и установившихся реакций цепи. Формулировка начальных условий.

#### 1.1 Расчет тока и напряжения в схеме до коммутации

Учитывая, что для постоянного тока ёмкостной элемент представляет собой разрыв, а индуктивный - короткое замыкание ветви, получаем эквивалентную схему (рисунок 3) для момента времени  $t = -0$ .

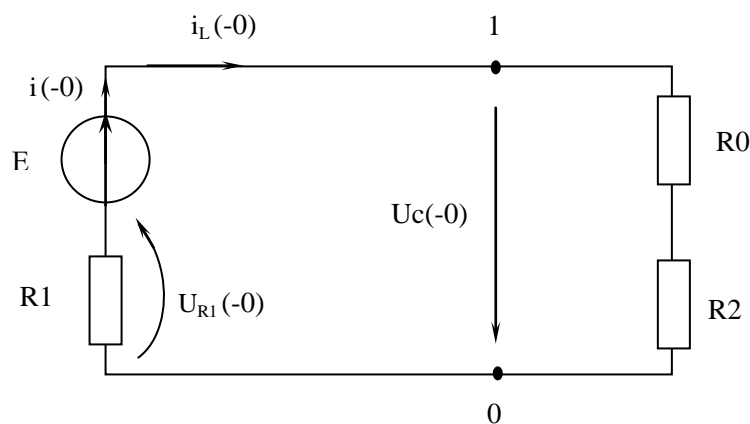


Рисунок 3. Эквивалентная схема для момента времени  $t = -0$

Ток  $i_C(-0) = 0$ , так как в ветви с ёмкостью постоянный ток не проходит. Напряжение  $U_L(-0) = 0$ , так как падения напряжения на индуктивности при постоянном токе нет. Тогда

$$i(-0) = i_L(-0) = \frac{E}{R_0 + R_1 + R_2} = 2 \text{ A}$$

$$U_C(-0) = i_L(-0) \cdot (R_0 + R_2) = 160 \text{ B}$$

$$U_{R1}(-0) = i_L(-0) \cdot R_1 = 40 \text{ B}$$

Расчет производился в программе MathCAD 11 (см. Приложение №1)



## 1.2 Формулировка начальных условий

Определение *независимых начальных условий* базируется на *законах коммутации*, в соответствии с которыми ток в катушке индуктивности и напряжение на конденсаторе скачком изменяться не могут. Таким образом, в момент коммутации  $t = +0$  величины тока индуктивности и напряжения емкости равны соответственно их величинам в момент непосредственно предшествующий коммутации  $t = -0$ :

$$\begin{aligned} i_L(+0) &= i_L(-0) \\ U_C(+0) &= U_C(-0) \end{aligned} \quad \text{- независимые начальные условия}$$

$$\begin{aligned} i_L(+0) &= 2 \text{ A} \\ U_C(+0) &= 160 \text{ B} \end{aligned}$$

Все остальные токи и напряжения, являясь *зависимыми начальными условиями*, в момент коммутации могут изменяться скачком. Они определяются из уравнений, составленных по законам Кирхгофа, для схемы после коммутации при  $t = +0$  (рисунок 4) с учетом найденных ранее  $i_L(+0)$  и  $U_C(+0)$ .

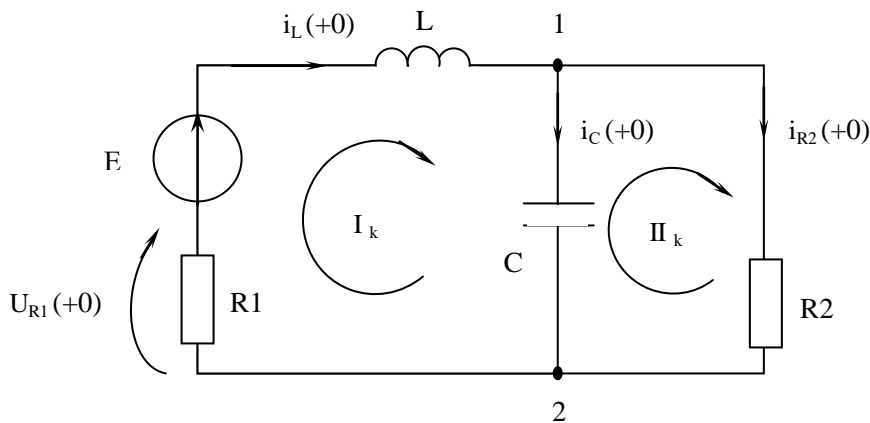


Рисунок 4. Эквивалентная схема для момента времени  $t = +0$

ЗНК для 1 контура:  $U_L(+0) + U_C(+0) + i_L(+0) \cdot R1 = E$

ЗНК для 2 контура:  $- U_C(+0) + i_{R2}(+0) \cdot R2 = 0$

ЗТК для 1 узла:  $i_L(+0) = i_C(+0) + i_{R2}(+0)$

Определим  $i_{R2}(+0) = \frac{U_C(+0)}{R_2} = 4 \text{ A}$

$$i_C(+0) = i_L(+0) - i_{R2}(+0) = -2 \text{ A}$$

$$U_L(+0) = E - U_C(+0) - i_L(+0) \cdot R1 = 0 \text{ B}$$

$$U_{R1}(+0) = i_L(+0) \cdot R1 = 40 \text{ B}$$

Расчет производился в программе MathCAD 11 (см. Приложение №2)



### 1.3 Расчет установившихся реакций в цепи после коммутации

Этот расчет проводится аналогично пункту 1.1, схема в данном случае рассматривается после завершения переходного процесса (рисунок 5).

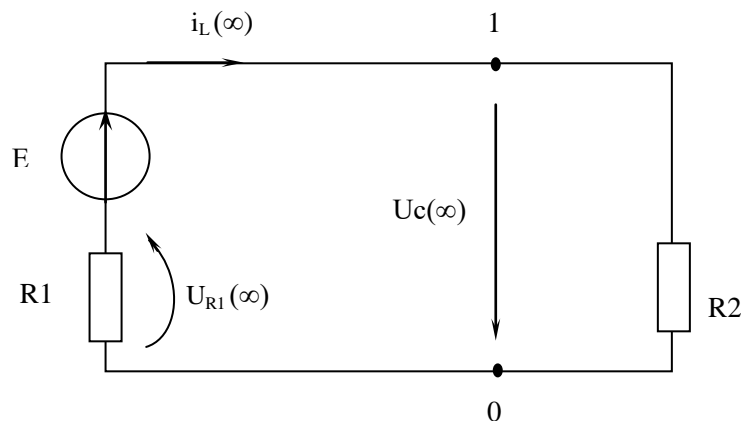


Рисунок 5. Схема после завершения переходного процесса

$$i_C(\infty) = 0 \text{ A}$$

$$U_L(\infty) = 0 \text{ B}$$

$$i_L(\infty) = \frac{E}{R_2 + R_1} = 3.33 \text{ A}$$

$$U_C(\infty) = i_L(\infty) \cdot R_2 = 133.33 \text{ B}$$

$$U_{R1}(\infty) = i_L(\infty) \cdot R_1 = 66.66 \text{ B}$$

Расчет производился в программе MathCAD 11 (см. Приложение №3)

По результатам расчетов, сделанных в пункте 1, построим таблицу.

Таблица 2.

Искомая величина	Момент времени		
	t = -0	t = +0	t = ∞
$i_L(t)$ , A	2	2	3.33
$U_C(t)$ , B	160	160	133.33
$U_{R1}(t)$ , B	40	40	66.66
$i_C(t)$ , A	0	-2	0
$U_L(t)$ , B	0	0	0



## 2. Составление системы дифференциальных уравнений для цепи после коммутации.

На основании законов Кирхгофа составляем систему уравнений для цепи после коммутации (рисунок 4). Затем, используя уравнения элементов получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно выбранных переменных - токов и напряжений.

Получим следующую систему уравнений по законам Кирхгофа:

$$U_L(t) + U_C(t) + i_L(t) \cdot R_1 = E$$

$$U_C(t) - i_{R2}(t) \cdot R_2 = 0$$

$$i_c(t) + i_{R2}(t) = i_L(t)$$

Проведя замену  $U_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$ ,  $i_c(t) = C \frac{dU_C}{dt}$  и  $i_L(t) \cdot R_1 = U_{R1}(t)$ , получим систему дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемую цепь после коммутации.

$$L \frac{di_L(t)}{dt} + U_C(t) + i_L(t) \cdot R_1 = E$$

$$U_C(t) - i_{R2}(t) \cdot R_2 = 0$$

$$C \frac{dU_C(t)}{dt} + i_{R2}(t) = i_L(t)$$

## 3. Нахождение характеристического уравнения, расчет его корней.

Для составления *характеристического уравнения* определим характеристическое входное сопротивление цепи  $Z(\lambda)$ , в котором  $j\omega$  заменяется на  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} Z(\lambda) &= R_1 + \lambda L + \frac{\frac{1}{\lambda C} \cdot R_2}{R_2 + \frac{1}{\lambda C}} = R_1 + \lambda L + \frac{\frac{1}{\lambda C} \cdot R_2}{\frac{R_2 \lambda C + 1}{\lambda C}} = R_1 + \lambda L + \frac{R_2}{R_2 \lambda C + 1} = \\ &= \frac{\lambda C R_1 R_2 + R_1 + \lambda^2 R_2 L C + \lambda L + R_2}{R_2 \lambda C + 1} = \frac{\lambda^2 (R_2 L C) + \lambda (C R_1 R_2 + L) + R_1 + R_2}{R_2 \lambda C + 1} \end{aligned}$$

Приравняв к нулю характеристическое входное сопротивление можно получить характеристическое уравнение. Так как полученное выражение - дробь, то характеристическое уравнение будет представлять собой ее числитель, приравненный к нулю.

$$\lambda^2 (R_2 L C) + \lambda (C R_1 R_2 + L) + R_1 + R_2 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda \frac{C R_1 R_2 + L}{R_2 L C} + \frac{R_1 + R_2}{R_2 L C} = 0 \qquad \lambda^2 + \lambda \cdot 2.5 \cdot 10^4 + 1.5 \cdot 10^6 = 0$$

$$\text{Здесь } \delta = \frac{C R_1 R_2 + L}{2 R_2 L C}, \omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_2 L C}}$$

Рассчитав  $\delta$  и  $\omega_0$  в программе MathCAD 11 (см. Приложение №4) получили:

$$\delta = 12510, \omega_0 = 1224,74$$

Так как  $\delta > \omega_0$ , то корни характеристического уравнения – вещественные

$$\text{Значит } \lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_1 = -60.096$$

$$\lambda_2 = -24959.9$$



## 4. Определение постоянных интегрирования для $U_{R1}(t)$ .

Для вычисления постоянных интегрирования составим алгебраические уравнения, используя начальные условия, полученные в пункте 1.2.

$$\text{Если } x = i_L, \quad x(+0) = i_L(+0), \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=+0} = \frac{U_L(+0)}{L}$$

$$\text{Если } x = U_C, \quad x(+0) = U_C(+0), \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=+0} = \frac{i_C(+0)}{C}$$

Значения  $i_L(+0)$ ,  $U_L(+0)$ ,  $U_C(+0)$  и  $i_C(+0)$  из таблицы 2.

$$\frac{dU_{R1}(+0)}{dt} = \frac{di_L(+0)}{dt} \cdot R_1$$

$$\frac{dU_{R1}(+0)}{dt} = \frac{U_L(+0)}{L} \cdot R_1$$

Общее решение системы уравнений второго порядка при вещественных разных корнях

$$U_{R1}(t) = U_{R1}(\infty) + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (*)$$

Для вещественных корней при  $t=+0$  из (\*)

$$U_{R1}(\infty) + A_1 + A_2 = U_{R1}(+0), \quad (1)$$

Взяв производную от (\*) и положив  $t=+0$  получаем

$$\left. \frac{dU_{R1}(\infty)}{dt} \right|_{t=+0} + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \left. \frac{dU_{R1}}{dt} \right|_{t=+0} \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) образуют систему, решая которую определяем  $A_1$  и  $A_2$ .

$$\begin{cases} U_{R1}(\infty) + A_1 + A_2 = U_{R1}(+0) \\ \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \frac{U_L(+0)}{L} \cdot R_1 \end{cases}$$

Расчет производился в программе MathCAD 11 (см. Приложение №5)

$$A_1 = -26.724, \quad A_2 = 0.064$$

Подставим  $A_1$  и  $A_2$  в уравнение (\*) и получим

$$U_{R1}(t) = 66.66 - 26.724e^{-60.096t} + 0.064e^{-24959.9t}$$

Сделаем проверку:

При  $t = +0$   $U_{R1}(t)$  должно быть равно  $U_{R1}(+0) = 40 \text{ В}$

$$U_{R1}(t) = 66.66 - 26.724 + 0.064 = 40 \text{ В};$$

а при  $t = \infty$   $U_{R1}(\infty)$  должно быть равно  $U_{R1}(\infty) = 66.66 \text{ В}$

$$U_{R1}(t) = 66.66 - 0 + 0 = 66.66 \text{ В}$$

Проверка сходится (см. таблицу 2).

## 2 Построение кривой переходного процесса для $U_{R1}(t)$

Заданная функция определяется выражением  $U_{R1}(t) = 66.66 - 26.724e^{-60.096t} + 0.064e^{-24959.9t}$

График построен в программе MathCAD 11 (см. Приложение №6)

$$U_{R1}(t) \uparrow \text{В}$$



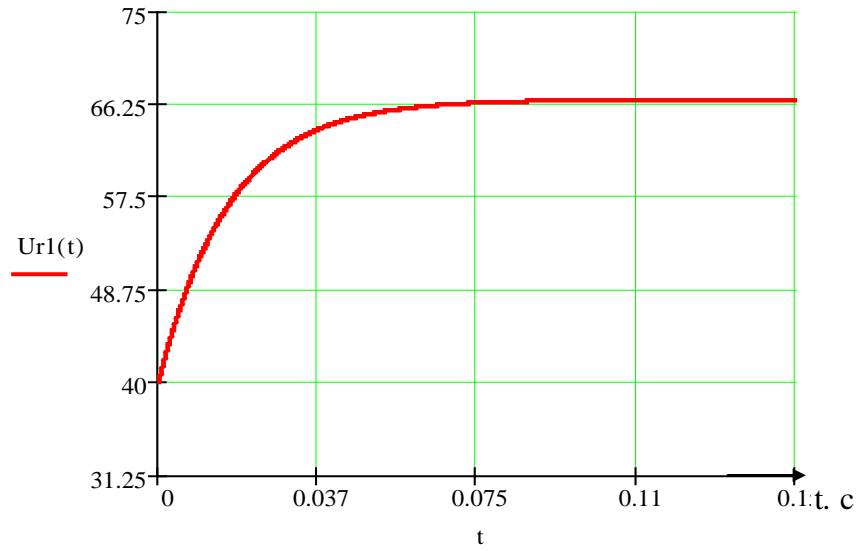


Рисунок 6. Кривая переходного процесса для  $U_{R1}(t)$



## 3 Анализ переходных процессов в линейных цепях второго порядка операторным методом

### 1. Расчет начальных условий и установившихся реакций в цепи после коммутации.

Начальные условия рассчитываются по законам коммутации и не зависят от метода решения. Поэтому при решении задачи используем начальные условия найденные при решении задачи классическим методом в пункте 1.1.2. В этом методе достаточно знать лишь независимые начальные условия, так как они определяют параметры дополнительного источника в операторных схемах замещения динамических элементов.

Установившиеся реакции определяются для проверки правильности решения. Так как слагаемое решения найденного операторным методом, определяемое нулевым корнем и следовательно не содержащее в себе экспоненциальной или тригонометрической функции, соответствует свободной составляющей в решении классическим методом, то оно должно быть равно установившейся реакции после коммутации, то есть величине этой переменной при  $t = \infty$ .

Такой расчет был проведен в пункте 1.1.3 и вместе с начальными условиями занесен в таблицу 2.

### 2. Составление операторной схемы замещения.

При составлении операторной схемы замещения рассматриваем цепь после коммутации (рисунок 4). При этом все переменные величины заменяют на их операторные изображениями

$$e(t) \rightarrow E(p), \quad i(t) \rightarrow I(p), \quad U(t) \rightarrow U(p).$$

Изображение источника постоянного напряжения узнаем из справочных данных:

$$e(t) = E \rightarrow E(p) = \frac{E}{p}.$$

В схеме замещения (рисунок 7) индуктивный элемент заменяется последовательным соединением операторного сопротивления  $pL$  и дополнительного источника напряжения с ЭДС  $Li_L(+0)$ , направление действия которого совпадает с положительным направлением тока  $I_L(p)$ .

Емкостной элемент заменяется последовательным соединением операторного сопротивления  $\frac{1}{pC}$  и дополнительного источника напряжения с ЭДС  $\frac{U_C(+0)}{p}$ , направление действия которого противоположно положительному направлению тока  $I_C(p)$ .

Операторная схема замещения цепи (рисунок 4), составленная таким образом, приведена на рисунке 7.

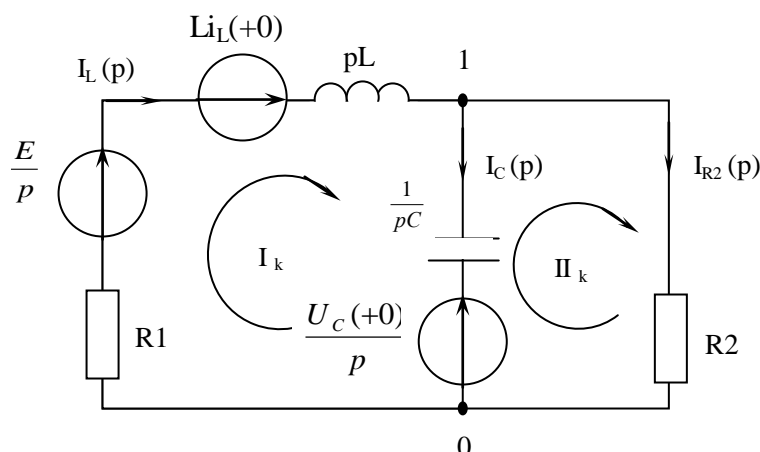




Рисунок 7. Операторная схема замещения цепи

### 3. Составление операторных уравнений для изображения тока $I(p)$ и напряжения $U(p)$ .

По законам Кирхгофа составим систему уравнений для схемы (рисунок 7).

$$\begin{cases} I_L(p) = I_C(p) + I_{R2}(p) \\ I_L(p) \cdot (R_1 + pL) + I_C(p) \cdot \frac{1}{pC} = \frac{E}{p} + Li_L(+0) - \frac{U_C(+0)}{p} \\ -I_C(p) \cdot \frac{1}{pC} + I_{R2}(p) \cdot R_2 = \frac{U_C(+0)}{p} \end{cases}$$

После подстановки первого уравнения системы в третье получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными  $I_L(p)$  и  $I_C(p)$ .

$$\begin{cases} I_L(p) \cdot (R_1 + pL) + I_C(p) \cdot \frac{1}{pC} = \frac{E}{p} + Li_L(+0) - \frac{U_C(+0)}{p} \\ -I_C(p) \cdot \frac{1}{pC} - I_C(p) \cdot R_2 + I_L(p) \cdot R_2 = \frac{U_C(+0)}{p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_L(p) \cdot (R_1 + pL) + I_C(p) \cdot \frac{1}{pC} = \frac{E}{p} + Li_L(+0) - \frac{U_C(+0)}{p} \\ I_L(p) \cdot R_2 - I_C(p) \cdot \left( \frac{1}{pC} + R_2 \right) = \frac{U_C(+0)}{p} \end{cases}$$

Подставим в полученную систему известные величины.

$$\begin{cases} I_L(p) \cdot (20 + p) + I_C(p) \cdot \frac{10^6}{p} = \frac{200}{p} + 2 - \frac{160}{p} \\ I_L(p) \cdot 40 - I_C(p) \cdot \left( \frac{10^6}{p} + 40 \right) = \frac{160}{p} \end{cases}$$

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} (20 + p) & \frac{10^6}{p} \\ 40 & -\left( \frac{10^6}{p} + 40 \right) \end{vmatrix} = -(20 + p) \cdot \left( \frac{10^6}{p} + 40 \right) - 40 \cdot \frac{10^6}{p} =$$

$$= -\frac{2 \cdot 10^7}{p} - 800 - 10^6 - 40p - \frac{4 \cdot 10^7}{p} = \frac{-2 \cdot 10^7 - 800p - 10^6 p - 40p^2 - 4 \cdot 10^7}{p} =$$

$$= -\frac{(40p^2 + 10^6 p + 6 \cdot 10^7)}{p} = -40 \cdot \frac{(p^2 + 2.5 \cdot 10^4 p + 1.5 \cdot 10^6)}{p}$$

Выражение в скобках совпадает с характеристическим уравнением, найденным при решении задачи классическим методом в п.1.3, что свидетельствует о правильности решения.



$$\begin{aligned}\Delta_1(p) &= \begin{vmatrix} \frac{40}{p} + 2 & \frac{10^6}{p} \\ \frac{160}{p} & -\left(\frac{10^6}{p} + 40\right) \end{vmatrix} = -\left(\frac{40}{p} + 2\right) \cdot \left(\frac{10^6}{p} + 40\right) - \frac{160}{p} \cdot \frac{10^6}{p} = \\ &= -\frac{4 \cdot 10^7}{p^2} - \frac{1600}{p} - \frac{2 \cdot 10^6}{p} - 80 - \frac{16 \cdot 10^7}{p^2} = -\frac{(4 \cdot 10^7 + 1600p + 2 \cdot 10^6 p + 80p^2 + 16 \cdot 10^7)}{p^2} = \text{Определим} \\ &= -\frac{(80p^2 + 2 \cdot 10^6 p + 2 \cdot 10^8)}{p^2}\end{aligned}$$

ток  $I_L(p)$ .

$$I_L(p) = \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} = \frac{-(80p^2 + 2 \cdot 10^6 p + 2 \cdot 10^8) \cdot p}{-40p^2 \cdot (p^2 + 2.5 \cdot 10^4 p + 1.5 \cdot 10^6)} = \frac{(80p^2 + 2 \cdot 10^6 p + 2 \cdot 10^8)}{40p \cdot (p^2 + 2.5 \cdot 10^4 p + 1.5 \cdot 10^6)}$$

Найдём напряжение  $U_{R1}(p)$ .

$$U_{R1}(p) = I_L(p) \cdot R_1$$

$$\begin{aligned}U_{R1}(p) &= \frac{(1600p^2 + 4 \cdot 10^7 p + 4 \cdot 10^9)}{40p \cdot (p^2 + 2.5 \cdot 10^4 p + 1.5 \cdot 10^6)} = \frac{40 \cdot \left(40p^2 + \frac{4 \cdot 10^7}{40} p + \frac{4 \cdot 10^9}{40}\right)}{40p \cdot (p^2 + 2.5 \cdot 10^4 p + 1.5 \cdot 10^6)} = \\ &= \frac{\left(40p^2 + \frac{4 \cdot 10^7}{40} p + \frac{4 \cdot 10^9}{40}\right)}{p \cdot (p^2 + 2.5 \cdot 10^4 p + 1.5 \cdot 10^6)}\end{aligned}$$



#### 4. Нахождение соответствующего оригинала для напряжения $U_{R1}(p)$ .

$$\begin{aligned}
 U_{R1}(p) &= \frac{40p^2 + \frac{4 \cdot 10^7}{40}p + \frac{4 \cdot 10^9}{40}}{p \cdot (p - \lambda_1) \cdot (p - \lambda_2)} = \\
 &= \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p - \lambda_1} + \frac{C_3}{p - \lambda_2} = \frac{C_1 \cdot (p - \lambda_1) \cdot (p - \lambda_2) + C_2 \cdot p \cdot (p - \lambda_2) + C_3 \cdot p \cdot (p - \lambda_1)}{p \cdot (p - \lambda_1) \cdot (p - \lambda_2)} = \\
 &= \frac{(C_1 + C_2 + C_3) \cdot p^2 + (-C_1\lambda_2 - C_1\lambda_1 - C_2\lambda_2 - C_3\lambda_1) \cdot p + C_1\lambda_1\lambda_2}{p \cdot (p - \lambda_1) \cdot (p - \lambda_2)}
 \end{aligned}$$

Составим систему из трёх уравнений из последнего выражения  $U_{R1}(p)$  из п.3.3

$$\begin{cases}
 C_1 + C_2 + C_3 = 40 \\
 C_1(-\lambda_2 - \lambda_1) - C_2\lambda_2 - C_3\lambda_1 = \frac{4 \cdot 10^7}{40} \\
 C_1\lambda_1\lambda_2 = \frac{4 \cdot 10^9}{40}
 \end{cases}$$

Рассчитав в программе MathCAD 11 (см. Приложение №) получили:

$$C_1 = 66.66, \quad C_2 = -26.76, \quad C_3 = 0.096$$

Таким образом, изображению

$$U_{R1}(p) = \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p - \lambda_1} + \frac{C_3}{p - \lambda_2} = \frac{66.66}{p} - \frac{26.76}{p + 60.096} + \frac{0.096}{p + 24959.9},$$

Соответствует оригинал

$$U_{R1}(p) = 66.66 - 26.76 \cdot e^{-60.096t} + 0.096 \cdot e^{-24959.9t} \quad (B)$$

Это совпадает с результатом, полученным классическим методом (см. п. 1.4).



# Контрольная

Всё сдал! — онлайн-сервис помощи студентам.

Цены на работы

в **2-3** раза  
ниже

Срок исполнения

от **1** дня

Замечания.