



Задание 5
Переходные процессы в линейных цепях

Для электрической цепи (рис. 1), рассчитать двумя способами (классическим и операторным) зависимости от времени токов, обозначенных на схеме цепи. Построить зависимости рассчитанных токов от времени t в промежутке от $t = 0$ до $t = 5/|p|_{\min}$, где $|p|_{\min}$ - меньший по величине модуль корня характеристического уравнения.

Таблица 1. Исходные данные.

Коммутация	E	R_1	R_2	R_3	R_4	L	C
	В	Ом				мГн	мкФ
Замыкание	61	20	10	20	61	2	6

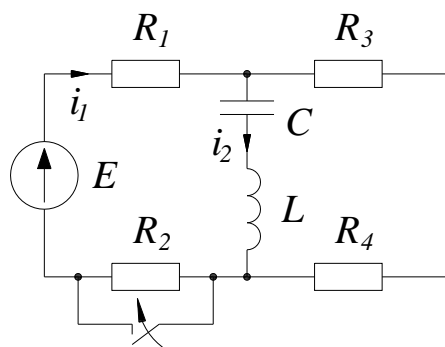


Рис. 1.

Решение.

1. Классический метод расчета.

Выполним расчет режима до коммутации:

$$i_1(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{61}{20 + 10 + 20 + 61} = 0.55 \text{ A};$$

$$i_2(0_-) = 0 \text{ A};$$

$$u_C(0_-) = i_1(0_-) \cdot (R_3 + R_4) = 0.55 \cdot (20 + 61) = 44.55 \text{ В.}$$

Независимые начальные условия:

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = 0 \text{ A}; \quad u_C(0_+) = u_C(0_-) = 44.55 \text{ В.}$$

Определим зависимые начальные условия (рис. 2):

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 20 + 61 = 81 \text{ Ом};$$

т.к. $i_2(0_+) = 0 \text{ A}$, то

$$i_1(0_+) = i_3(0_+) = \frac{E}{R_1 + R_{34}} = \frac{61}{20 + 81} = 0.604 \text{ A};$$

$$u_L(0_+) = i_3(0_+) \cdot R_{34} - u_C(0_+) = 0.604 \cdot 81 - 44.55 = 4.374 \text{ В.}$$

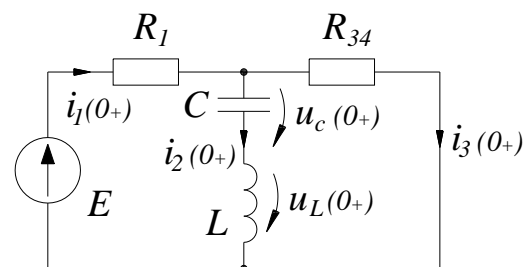


Рис. 2.

Рассчитаем принужденные составляющие тока через индуктивность и напряжения на конденсаторе:

$$i_{2np} = 0 \text{ A}; \quad i_{1np} = i_{3np} = \frac{E}{R_1 + R_{34}} = \frac{61}{20 + 81} = 0.604 \text{ A};$$

$$u_{Cnp} = i_{3np} R_{34} = 0.604 \cdot 81 = 48.924 \text{ В.}$$



Для расчета свободных составляющих составим характеристическое уравнение:

$$z_{ex}(p)|_{p=j\omega} = 0; \quad \frac{R_1 \cdot R_{34}}{R_1 + R_{34}} + Lp + \frac{1}{cp} = 0; \quad \frac{R_1 \cdot R_{34}}{R_1 + R_{34}} + \frac{Lcp^2 + 1}{cp} = 0;$$

$$\frac{R_1 R_{34} cp + (Lcp^2 + 1) \cdot (R_1 + R_{34})}{(R_1 + R_{34})cp} = 0; \quad (R_1 + R_{34})Lcp^2 + R_1 R_{34} cp + R_1 + R_{34} = 0;$$

$$(20 + 81) \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-6} p^2 + 20 \cdot 81 \cdot 6 \cdot 10^{-6} p + 20 + 81 = 0;$$

$$1.212 \cdot 10^{-6} p^2 + 9.72 \cdot 10^{-3} p + 101 = 0;$$

$$D = (9.72 \cdot 10^{-3})^2 - 4 \cdot 1.212 \cdot 10^{-6} \cdot 101 = -395.17 \times 10^{-6};$$

$$p_{1,2} = \frac{-9.72 \cdot 10^{-3} \pm \sqrt{-395.17 \cdot 10^{-6}}}{2 \cdot 1.212 \cdot 10^{-6}} = -4010 \pm j8201 = -\alpha \pm j\omega_0,$$

т.е. $\alpha = 4010 \text{ с}^{-1}$; $\omega_0 = 8201 \text{ рад/с}$.

Следовательно: $i_{2cв} = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \psi_2)$; $u_{Cсв} = Be^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \psi_c)$.

Определим постоянные интегрирования A , B , ψ_c , ψ_2 .

$$\begin{cases} i_2(t) = i_{2np} + i_{2cв} = i_{2np} + Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \psi_2) \\ \frac{di_2(t)}{dt} = -\alpha Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \psi_2) + \omega_0 Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \psi_2) \end{cases}$$

При $t = 0_+$:

$$\begin{cases} i_2(0_+) = i_{2np} + A \sin \psi_2 \\ \frac{u_L(0_+)}{L} = -\alpha A \sin \psi_2 + \omega_0 A \cos \psi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \sin \psi_2 = i_2(0_+) - i_{2np} \\ \frac{u_L(0_+)}{L} = (i_2(0_+) - i_{2np})(-\alpha + \omega_0 \operatorname{ctg} \psi_2) \end{cases}$$

$$\psi_2 = \operatorname{arcctg} \left[\frac{u_L(0_+)}{(i_2(0_+) - i_{2np})L\omega_0} + \frac{\alpha}{\omega_0} \right] = \operatorname{arcctg} \left[\frac{4.374}{(0 - 0) \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 8201} + \frac{4010}{8201} \right] = 0^\circ;$$

$$A = \frac{u_L(0_+)}{(-\alpha \sin \psi_2 + \omega_0 \cos \psi_2)L} = \frac{4.374}{(-4010 \sin 0^\circ + 8201 \cos 0^\circ) \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 0.27.$$

Следовательно: $i_2(t) = 0.27 e^{-4010t} \cdot \sin(8201t)$.

$$\begin{cases} u_c(t) = u_{Cnp} + u_{Cсв} = u_{Cnp} + Be^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \psi_c) \\ \frac{du_c(t)}{dt} = -\alpha Be^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \psi_c) + \omega_0 Be^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \psi_c) \end{cases}$$

При $t = 0_+$:



$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_{Cnp} + B \sin \psi_C \\ \frac{i_2(0_+)}{c} = -\alpha B \sin \psi_C + \omega_0 B \cos \psi_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} B \sin \psi_C = u_C(0_+) - u_{Cnp} \\ \frac{i_2(0_+)}{c} = (u_C(0_+) - u_{Cnp})(-\alpha + \omega_0 \operatorname{ctg} \psi_C) \end{cases}$$

$$\psi_C = \operatorname{arcctg} \left[\frac{i_2(0_+)}{(u_C(0_+) - u_{Cnp})c\omega_0} + \frac{\alpha}{\omega_0} \right] = \operatorname{arcctg} \left[\frac{0}{(44.55 - 48.924) \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 8201} + \frac{4010}{8201} \right] = 63.94^\circ ;$$

$$B = \frac{u_C(0_+) - u_{Cnp}}{\sin \psi_C} = \frac{44.55 - 48.924}{\sin 63.94^\circ} = -4.89 .$$

Следовательно: $u_C(t) = 48.924 - 4.89 e^{-4010t} \cdot \sin(8201t + 63.94^\circ) .$

Для нахождения тока $i_1(t)$ составим уравнение по второму закону Кирхгофа (рис. 1, ключ замкнут):

$$i_1(t) \cdot R_1 + u_C(t) + u_L(t) = E, \quad \text{откуда: } i_1(t) = \frac{E - u_C(t) - u_L(t)}{R_1} .$$

$$\begin{aligned} \text{Находим: } u_L(t) &= L \cdot \frac{di_2(t)}{dt} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot (-4010 \cdot 0.27 e^{-4010t} \cdot \sin(8201t) + 8201 \cdot 0.27 e^{-4010t} \cdot \cos(8201t)) = \\ &= -2.165 e^{-4010t} \cdot \sin(8201t) + 4.429 e^{-4010t} \cdot \cos(8201t) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{1}{20} \cdot (61 - 48.924 + 4.89 e^{-4010t} \cdot \sin(8201t + 63.94^\circ) + 2.165 e^{-4010t} \cdot \sin(8201t) - 4.429 e^{-4010t} \cdot \cos(8201t)) = \\ &= 0.604 + 0.245 e^{-4010t} \cdot \sin(8201t + 63.94^\circ) + 0.108 e^{-4010t} \cdot \sin(8201t) - 0.221 e^{-4010t} \cdot \cos(8201t) ; \\ &= \{ 0.245 e^{j63.94^\circ} + 0.108 e^{j0^\circ} - 0.221 e^{j90^\circ} = 0.2 e^{-j0.96^\circ} \} = 0.604 + 0.216 e^{-4010t} \cdot \sin(8201t - 0.24^\circ) \text{ А.} \end{aligned}$$

Проверка: $i_1(0) = 0.604 + 0.216 \cdot \sin(-0.24^\circ) = 0.603 \text{ А}; \approx i_1(0_+) = 0.604 \text{ А} .$

2. Операторный метод расчета.

Составим операторную схему замещения (рис.3). При этом в ветвь с конденсатором дополнительно включаем источник ЭДС $u_C(0_+)/p$, направленный против тока, а в ветвь с индуктивностью - источник ЭДС $Li_2(0_+)$, направленный по току, но так как $i_2(0_+) = 0$, то на схеме он не показан.

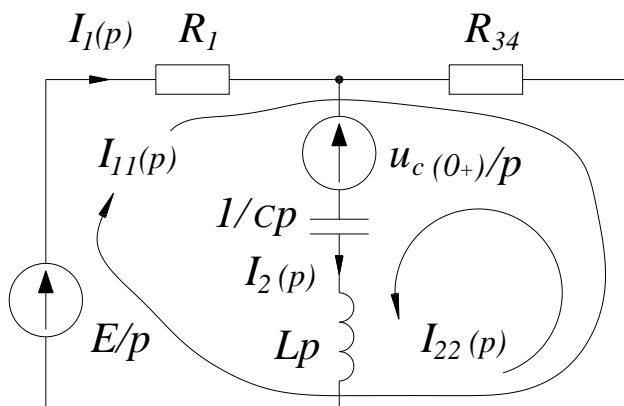


Рис. 3.



Для нахождения операторных изображений $I_1(p)$, $I_2(p)$ искомых токов воспользуемся методом контурных токов:

$$\begin{cases} (R_1 + R_{34})I_{11}(p) - R_{34}I_{22}(p) = \frac{E}{p} \\ -R_{34}I_{11}(p) + (R_{34} + Lp + \frac{1}{cp})I_{22}(p) = -\frac{u_C(0_+)}{p} \end{cases}$$

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} R_1 + R_{34} & -R_{34} \\ -R_{34} & (R_{34} + Lp)cp + 1 \end{vmatrix} = \frac{((R_{34} + Lp)cp + 1)(R_1 + R_{34}) - R_{34}^2 cp}{cp};$$

$$\Delta_{11}(p) = \begin{vmatrix} \frac{E}{p} & -R_{34} \\ -\frac{u_C(0_+)}{p} & (R_{34} + Lp)cp + 1 \end{vmatrix} = \frac{E((R_{34} + Lp)cp + 1) - R_{34}u_C(0_+)cp}{cp^2};$$

$$\Delta_{22}(p) = \begin{vmatrix} R_1 + R_{34} & \frac{E}{p} \\ -R_{34} & -\frac{u_C(0_+)}{p} \end{vmatrix} = \frac{ER_{34} - (R_1 + R_{34})u_C(0_+)}{p};$$

$$\begin{aligned} I_1(p) = I_{11}(p) &= \frac{\Delta_{11}(p)}{\Delta(p)} = \frac{E((R_{34} + Lp)cp + 1) - R_{34}u_C(0_+)cp}{p(((R_{34} + Lp)cp + 1)(R_1 + R_{34}) - R_{34}^2 cp)} = \\ &= \frac{ELcp^2 + (E - u_C(0_+))R_{34}cp + E}{p(R_{34}R_1cp + R_1Lcp^2 + R_1 + R_{34}^2cp + R_{34}Lcp^2 + R_{34} - R_{34}^2cp)} = \frac{ELcp^2 + (E - u_C(0_+))R_{34}cp + E}{p((R_1 + R_{34})Lcp^2 + R_{34}R_1cp + R_1 + R_{34})} = \\ &= \frac{61 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-6} p^2 + (61 - 44.55) \cdot 81 \cdot 6 \cdot 10^{-6} p + 61}{p[(20 + 81) \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-6} p^2 + 81 \cdot 20 \cdot 6 \cdot 10^{-6} p + 20 + 81]} = \frac{0.732 \cdot 10^{-6} p^2 + 7.995 \cdot 10^{-3} p + 61}{p(1.212 \cdot 10^{-6} p^2 + 9.72 \cdot 10^{-3} p + 101)} = \frac{F_1(p)}{pF_2(p)}. \end{aligned}$$

Корни уравнения $F_2(p) = 0$: $p_{1,2} = -4010 \pm j8201 = 9129e^{\pm j116.06^\circ}$,

найлены при расчете классическим методом.

Для нахождения оригинала $i_1(t)$ воспользуемся формулой:

$$i_1(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_1)}{p_1 F_2'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} \right],$$

где: $F_1(0) = 61$; $F_2(0) = 101$;

$$F_1(p_1) = 0.732 \cdot 10^{-6} (9129 e^{j116.06^\circ})^2 + 7.995 \cdot 10^{-3} \cdot 9129 \cdot e^{j116.06^\circ} + 61 = 19.391 e^{j116.06^\circ};$$

$$F_2'(p) = 2 \cdot 1.212 \cdot 10^{-6} p + 9.72 \cdot 10^{-3};$$

$$F_2'(p) = 2 \cdot 1.212 \cdot 10^{-6} \cdot 9129 e^{j116.06^\circ} + 9.72 \cdot 10^{-3} = 19.879 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ}.$$



Получаем:

$$i_1(t) = \frac{61}{101} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{19.391 e^{j116.06}}{9129 e^{j116.06} \cdot 19.879 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ}} e^{(-4010 + j8201)t} \right] =$$

$$= 0.604 + 0.214 e^{-4010t} \cdot \cos(8201t - 90^\circ) = 0.604 + 0.214 e^{-4010t} \cdot \sin(8201t) \text{ А.}$$

Аналогично, находим:

$$I_2(p) = I_{22}(p) = \frac{\Delta_{22}(p)}{\Delta(p)} = \frac{(ER_{34} - (R_1 + R_{34})u_C(O_+))c}{((R_{34} + Lp)cp + I)(R_1 + R_{34}) - R_{34}cp} = \frac{(ER_{34} - (R_1 + R_{34})u_C(O_+))c}{(R_1 + R_{34})Lcp^2 + R_{34}R_1cp + R_1 + R_{34}} =$$

$$= \frac{[61 \cdot 81 - (20 + 81) \cdot 44.55] \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{1.212 \cdot 10^{-6} \cdot p^2 + 9.72 \cdot 10^{-3} \cdot p + 101} = \frac{2.649 \cdot 10^{-3}}{1.212 \cdot 10^{-6} p^2 + 9.72 \cdot 10^{-3} p + 101} = \frac{F(p)}{F_2(p)}.$$

$$i_2(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{F(p_1)}{F_2'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} \right],$$

$$F(p_1) = 2.649 \times 10^{-3};$$

$$i_2(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{2.649 \cdot 10^{-3}}{19.879 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ}} \cdot e^{(-4010 + j8201)t} \right] = 0.266 e^{-4010t} \cdot \cos(8201t - 90^\circ) = 0.266 e^{-4010t} \cdot \sin(8201t) \text{ А.}$$

Построим зависимости рассчитанных токов от времени t .

Время окончания переходного процесса: $t_{nep} = \frac{5}{\alpha} = \frac{5}{4010} = 1.247 \text{ мс.}$

Период затухающей синусоиды: $T = \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{2 \cdot 3.14}{8201} = 0.766 \text{ мс.}$

Составим расчетную таблицу:

Таблица 2

$t, \text{ мс}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$i_1(t), \text{ А}$	0,709	0,701	0,645	0,598	0,580	0,585	0,597	0,606	0,609	0,608	0,605	0,603	0,603
$i_2(t), \text{ А}$	0,132	0,121	0,051	-0,008	-0,030	-0,024	-0,008	0,003	0,007	0,005	0,001	-0,001	-0,001

Графики $i_1(t)$ и $i_2(t)$ по данным таблицы 2 построены на рис.4 и рис.5 соответственно.



$i_1(t), A$

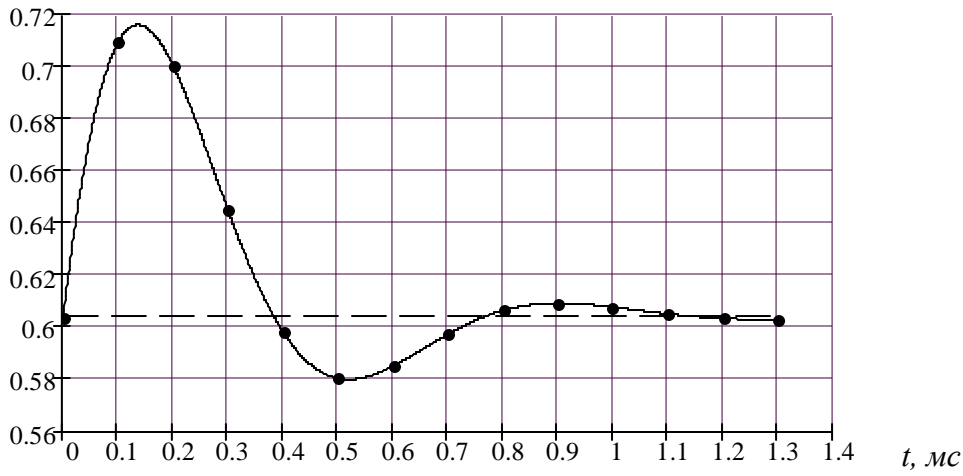


Рис. 4.

$i_2(t), A$

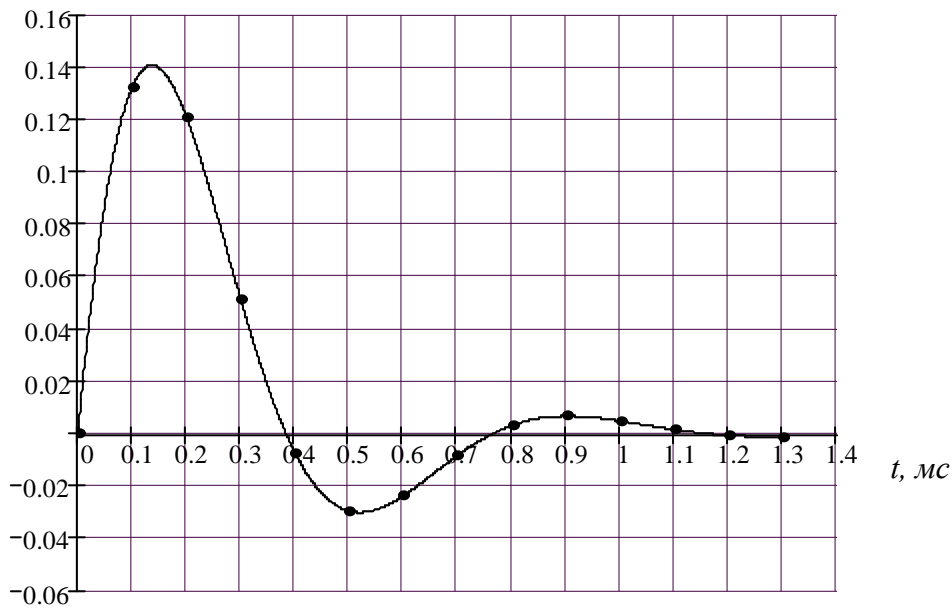


Рис. 5.